Dragoš M. Cvetković

Slobodan K. Simić

ODABRANA POGLAVLJA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

Treće izdanje

AKADEMSKA MISAO

Beograd, 2012.

Dragoš M. Cvetković, Slobodan K. Simić

ODABRANA POGLAVLJA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

Treće izdanje

Recenzenti

Dr Ratko Tošić

Dr Dragan Acketa

Izdaje i štampa

AKADEMSKA MISAO, Beograd

Tiraž

300 primeraka

ISBN 978-86-7466-443-8

ODABRANA POGLAVLJA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

Sadržaj

Predgovor

Možemo reći da "Odabrana poglavlja iz diskretne matematike" predstavljaju zaista odabrana poglavlja iz diskretne matematike ali takodje da predstavljaju odabrana poglavlja iz knjige "Diskretna matematika" ! Naime autori su komponovali ovu knjigu izborom poglavlja iz svoje, u dva izdanja objavljene (1990. i 1996. godine), obimnije knjige pod nazivom "Diskretna matematika" (podnaslov "Matematika za kompjuterske nauke").

Knjiga predstavlja udžbenik za deo predmeta "Matematika 4" na drugoj godini dodiplomske nastave i deo literature za predmet "Odabrana poglavlja iz diskretne matematike" na poslediplomskim studijama na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu. Izlaganja u knjizi se oslanjaju na delove diskretne matematike i linearne algebre (Booleove algebre, kvantifikatorski račun, kombinatorika, teorija grafova, grupe, vektorski prostori) koji su obradjeni u nastavi na prvoj godini (videti udžbenik [25] iz spiska literature).

U nastavku, iza ovog predgovora, reprodukujemo one delove iz predgovora knjiga - prethodnica koji su od interesa i za čitaoce ove knjige.

S.Simić je napisao odeljke 1.6, 2.2, 2.3, 2.4, 3.1.2, 3.1.3, 8.1, 8.2 i 8.6. Autori su zajednički napisali odeljke 1.7, 2.5, 3.2.2, 3.2.3, 3.5, 3.7, 4.2, 5.2, 5.3 i 7.8. Odeljak 3.1.4 napisala je dr Vera Kovačević–Vujčić, a deo teksta u Odeljku 3.7 dr Mirjana Čangalović, profesori Fakulteta organizacionih nauka, na čemu im autori najlepše zahvaljuju. Ostatak teksta napisao je D. Cvetković. Autori su izvršili modifikacije u svojim tekstovima koje su bile neophodne za dobijanje jedinstvenog teksta knjige. U istom cilju na pojedinim mestima autori su intervenisali u tekstu drugog autora sa kraćim insertima.

Beograd, februara 2002. *A u t o r i*

Iz predgovora prvom izdanju knjige "Diskretna matematika"

Diskretna matematika je matematika računarskih nauka. Zadivljujući razvoj računarske tehnike u zadnjih nekoliko decenija zahtevao je izgradnju adekvatnog matematičkog aparata. Konačnost memorije računara i činjenica da su računari mašine diskretnog dejstva (prelaze iz stanja u stanje u određenim trenucima vremena) uslovljavaju potrebu rešavanja velikog broja problema na konačnim ili, ređe, na beskonačnim ali prebrojivim skupovima (diskretni skupovi). Pre pojave računara gotovo da nije postojala stvarna potreba za razmatranjem ovakvih problema. (Jedan od izuzetaka je razvoj matematičke logike u prvoj polovini dvadesetog veka podstaknut potrebom revizije osnova matematike). Zbog toga se može reći da je doba računara dovelo do svojevrsne sinteze do tada dobro razvijenih delova diskretne matematike, kao što su matematička logika i veliki deo opšte algebre (tzv. moderna algebra), i novonastalih ili iz osnova preporođenih teorija kao što su teorija grafova, kombinatorika, teorija konačnih automata, teorija kodova itd. Današnja diskretna matematika nema onaj stepen unutrašnje povezanosti svojih delova kao što je to slučaj kod kontinualne matematike (matematičke analize); verovatno je to posledica prirode stvari kod diskretnih struktura. Međutim, po mišljenju autora, postoji jedna duboka analogija diskretne matematike sa matematičkom analizom u pogledu nastanka i razvoja ovih grana matematike. Kada su pre tri veka Newton (Njutn) i Leibnitz (Lajbnic) otkrili diferencijalni i integralni račun, to je nesumnjivo bilo uslovljeno tadašnjom industrijskom revolucijom; pojava najrazličitijih mašina (kontinualnog dejstva!) zahtevala je i odgovarajući matematički aparat, a to je bila matematička analiza. Današnja kompjuterska revolucija iznedrila je diskretnu matematiku.

Iako se diskretna matematika prvenstveno vezuje za računarske nauke ona je od velikog značaja i u drugim naučnim disciplinama: elektrotehnika (a posebno telekomunikaciona tehnika), hemija, operaciona istraživanja, ekonomske nauke itd.

Matematika pretkompjuterskog doba je sugerisala neinteresantnost problema na konačnim skupovima sa motivacijom da je svaki takav problem principijelno rešiv ispitivanjem svih mogućih varijanti, kojih ima konačno mnogo. Konkretni takvi problemi nisu rešavani jer su izmicali mogućnostima čoveka a nije bilo ni preke potrebe da se rešavaju (osim delimično u okvirima tzv. zabavne ili rekreativne matematike). Pojava kompjutera je istovremeno donela sredstvo za rešavanje problema na konačnim skupovima (tj. same kompjutere) i neiscrpan izvor konkretnih problema tog tipa za čije rešavanje postoji jak interes jer se njihova rešenja primenjuju u toj istoj kompjuterskoj tehnici. Ubrzo se pokazala izvesna naivnost u ranije preovlađujućim mišljenima o neinteresantnosti problema na konačnim skupovima. Ističemo sledeća dva aspekta:

1° Nalaženje svih varijanti jednog problema na konačnom skupu može da bude vrlo netrivijalno.

2° Pretpostavimo da znamo algoritam za pronalaženje svih varijanti jednog problema na konačnom skupu. Broj varijanti, iako konačan može da bude tako veliki da do rešenja ne možemo da dođemo u razumno dugom vremenu, čak i uz upotrebu računara. Zaista postoje optimizacioni i drugi problemi na skupovima sa dvadesetak elemenata čije rešavanje "grubom silom" tj. prostim ispitivanjem svih mogućnosti zahteva nekoliko desetina godina rada brzih računara.

Ovi navodi ukazuju na aktuelnost procene vremenske a često i prostorne (u smislu potrebe angažovanja memorijskih resursa) efikasnosti računarski orijentisanih procedura (algoritama i heuristika). Algoritamska nerešivost problema ili vremenska neefikasnost poznatih algoritama za neki problem mogu da uslove odustanjanje od najboljih rešenja i prelaz na heuristike.

U matematičkoj literaturi na našem jeziku nažalost ne postoje knjige o diskretnoj matematici u kojima bi za potrebe kompjuterskih nauka bili na jednom mestu i povezano obrađeni razni njeni delovi[1]. Ova knjiga pokušava da ublaži taj nedostatak. Namena knjige je da u doba računara zainteresovanom čitaocu posluži kao priručnik za brzu orijentaciju u diskretnoj matematici...

Napomenimo da je udžbenička literatura ovog tipa veoma rasprostranjena u inostranstvu a specijalno na engleskom i ruskom jeziku (videti spisak literature koji daje samo mali izbor postojeće literature).

Knjiga je uvodnog i pretežno enciklopedijskog karaktera...

Ova knjiga je nastala proširenjem knjige prvog autora "Diskretne matematičke strukture – Matematika za kompjuterske nauke" od koje je preuzela podnaslov. "Diskretne matematičke strukture" su objavljene u tri izdanja (1978, 1983 i 1987. godine) a ovde reprodukujemo deo predgovora I izdanju.

U spisku literature dat je širi izbor inostranih knjiga sa koncepcijom koja je slična koncepciji ove knjige i knjiga koje opširnije tretiraju matematičke discipline obrađene u pojedinim poglavljima ove knjige. Većina navedene literature je konsultovana prilikom izrade ove knjige.

Beograd, marta 1990. *A u t o r i*

---

[1]Izuzetak je donekle prethodnica ove knjige: "Diskretne matematičke strukture-matematika za kompjuterske nauke", Naučna knjiga, Beograd 1978, 1983, 1987

Iz predgovora drugom izdanju knjige "Diskretna matematika"

Knjiga "Diskretna matematika" pojavljuje se u drugom izdanju sa više inovacija. Računarska obrada je izvršena savremenijim procesorom teksta što je doprinelo poboljšanju kvaliteta matematičkog sloga i uklonjene su uočene štamparske greške. Tekst je poboljšan na mnogim mestima. Unesen je veći broj novih delova teksta ...

Obradu teksta na računaru za ovo izdanje izvršio je Miroslav Živković, diplomirani inženjer elektrotehnike.

Beograd, novembra 1995. *A u t o r i*

Iz predgovora prvom izdanju knjige "Diskretne matematičke strukture"

Po tradiciji nastava matematike na tehničkim fakultetima bazirana je pretežno na matematičkoj analizi, tj. na kontinualnoj matematici. U današnje vreme u inženjerskoj praksi pojavljuju se sve češće i diskretni matematički modeli, što dovodi do potrebe za uvođenjem metoda diskretne matematike u nastavu. Ova knjiga je napisana sa namerom da podrži takve tendencije koje se kod nas sporije prihvataju nego u nekim drugim sredinama u svetu.

Posebno u kompjuterskim naukama preovlađuje diskretna matematika u vezi sa čim je i izabran podnaslov knjige: "Matematika za kompjuterske nauke".

U inostranstvu je poslednjih godina obljavljeno više knjiga sa sličnim intencijama i sadržajem (videti na primer, [7], [10], [81], [91], [96] u spisku literature).

Knjiga je uvodnog karaktera i obrađuje osnove sledećih matematičkih disciplina: matematička logika, teorija skupova, opšta algebra, kombinatorika, teorija grafova, račun verovatnoće, teorija informacija i teorija igara. Mada su kod nas u udžbeničkoj literaturi tretirane manje ili više sve ove discipline, malo je bilo pokušaja preglednog i ceovitog izlaganja osnova diskretne matematike.

Knjiga je prvenstveno namenjena onima koji studiraju ili se bave kompjuterskim naukama ali ona može biti od koristi i drugim strukama kao što su, na primer, elektrotehnika, automatika, matematičke nauke, ekomomske nauke itd.

Beograd, februara 1977. *A u t o r*

1. Teorija grafova

Teorija grafova zauzima značajno mesto u računarskim naukama. Najrazličitije diskretne strukture koje se pojavljuju u računarstvu pogodno se opisuju grafovima i digrafovima. Tu spadaju, na primer, programske strukture (dijagrami toka računarskih programa i dr.), strukture podataka (na primer, binarna stabla), mreže računara, planarna elektronska kola itd.

1.1. Pregled elementarnih pojmova

Podrazumevajući da je čitalac upoznat sa osnovama teorije grafova, u ovom odeljku dajemo pregled definicija nekih od osnovnih pojmova vezanih za grafove.

Graf se definiše kao apstraktni matematički objekt, a figura sastavljena od tačaka i linija je geometrijska predstava ili crtež grafa. No, uobičajeno je da se ta geometrijska reprezentacija takođe naziva grafom. Pošto je graf određen jednim skupom i jednom binarnom relacijom u tom skupu, prirodno je da se ukupnost ta dva objekta (skup i relacija) uzme za definiciju grafa.

Definicija 1. *Neka je X neprazan skup i ρ binarna relacija u X. Uređen par $G = (X, \rho)$ se naziva graf. Elementi skupa X su čvorovi grafa, a elementi skupa ρ grane grafa.*

Ako paru čvorova x_i, x_j odgovaraju dve grane (x_i, x_j) i (x_j, x_i) na crtežu se ponekad ne povlače dve linije između čvorova x_i i x_j nego se jedinstvena linija dvostrano orijentiše ili se uopšte ne orijentiše. Grana koja spaja čvor sa samim sobom naziva se *petlja*.

Definicija 2. *Graf $G = (X, \rho)$ je simetričan ili neorijentisan ako i samo ako je ρ simetrična relacija.*

Kod neorijentisanih grafova sve grane su dvostrano orijentisane (u stvari, neorijentisane), pa se strelice na crtežu izostavljaju. Neorijentisani grafovi mogu ali ne moraju imati petlje.

Definicija 3. *Graf $G = (X, \rho)$ je antisimetričan ili orijentisan ako i samo ako je ρ antisimetrična relacija.*

Ako se pri predstavljanju grafa ne koristi konvencija da se parovi grana suprotnih orijentacija zamenjuju neorijentisanim granama, graf se naziva *digraf*.

Grafovi se dele na *konačne* i *beskonačne* grafove prema tome da li je skup čvorova X konačan ili beskonačan. U ovoj knjizi razmatraćemo, uglavnom, konačne grafove.

Napomenimo da se graf može definisati i opisom njegovog crteža, tj. kao skup tačaka u ravni (ili prostoru), od kojih su neke međusobno povezane neprekidnim glatkim orijentisanim ili neorijentisanim linijama.

Geometrijska predstava grafa (crtež grafa) sugeriše nam generalizaciju pojma grafa. Mogu se zamisliti grafovi kod kojih se između dva čvora nalazi više od jedne grane iste orijentacije. Naravno, ovde su mogućne i višestruke petlje. Ovakvi grafovi se nazivaju *multigrafovi.* Multigraf se može definisati i apstraktno.

Definicija 4. *Neka je X neprazan skup i U jedna kombinacija sa ponavljanjem skupa X^2. Uređen par $G = (X, U)$ naziva se multigraf.*

Za proizvoljni graf, umesto $G = (X, \rho)$ često se piše $G = (X, U)$, pri čemu se zaobilazi pojam binarne relacije i U tumači kao skup uređenih parova elemenata skupa X, tj. kao skup grana. Dakle, graf je zadat ako je zadat skup čvorova i skup grana.

Za neorijentisane grafove piše se opet $G = (X, U)$, pri čemu se U tretira često kao skup neuređenih parova elemenata iz skupa X, tj. kao neorijentisanih ili dvostrano orijentisanih grana.

Za dva čvora neorijentisanog grafa bez petlji kažemo da su susedna ako su spojena granom. Dva susedna čvora su *krajnje tačke* svake grane koja ih spaja. Ako je neki čvor jedna od krajnjih tačaka izvesne grane, kaže se da se ta grana *stiče* u ovom čvoru. U ovom slučaju se takođe kaže da su čvor i grana *incidentni* ili *susedni.* Broj susednih čvorova za čvor x zove se *stepen* čvora x. Stepen čvora se može definisati i kao broj grana koje se stiču u tom čvoru. Dve grane su *susedne* ako imaju zajednički čvor.

Ako u nekom digrafu grana u spaja čvorove x_i i x_j i orijentisana je od x_i ka x_j, kaže se da grana u *izlazi* iz čvora x_i a *ulazi* u čvor x_j . Takođe se kaže da je x_i *početni*, a x_j *završni* čvor grane u. Za svaki čvor digrafa definiše se *ulazni* i *izlazni stepen.* Ulazni stepen čvora je jednak broju grana koje ulaze u taj čvor, a izlazni stepen je jednak broju grana koje izlaze. Petlja se obično smatra i ulaznom i izlaznom granom za odgovarajući čvor.

Ponekad se i kod orijentisanog grafa ili digrafa zanemaruje orijentacija grane (ako problem koji se opisuje grafom to dopušta) i definiše jedinstveni stepen čvora kao u slučaju neorijentisanih grafova.

Definicijama 5,6 i 7 uvodimo različite delove grafa.

Definicija 5. *Neka je dat graf $G = (X, U)$. Graf oblika $H = (Y, T)$, pri čemu je $Y \subset X$ i $T = U \cap Y \times Y$ (T je podskup skupa U koji sadrži sve one parove iz U koji su obrazovani samo od elemenata skupa Y) naziva se podgraf grafa G, obrazovan skupom čvorova Y.*

Dakle, podgraf iz datog grafa dobija se na taj način što se uoči neki podskup Y skupa čvorova i udalje iz grafa svi ostali čvorovi zajedno sa granama koje su susedne udaljenim čvorovima. U podgrafu ostaju samo grane koje povezuju čvorove iz Y. Ako je $Y \neq X$, H se naziva *pravi* podgraf.

Definicija 6. *Delimičnim ili parcijalnim grafom grafa $G = (X, U)$ naziva se svaki graf oblika $H = (X, T)$, pri čemu je $T \subset U$.*

Definicija 7. *Delimični graf podgrafa naziva se delimični podgraf datog grafa.*

Definicija 8. *Put dužine k u digrafu je svaki niz grana $u_1, \ldots, u_k$ koji ima sledeće osobine:*

1° *grana u_1 polazi iz proizvoljnog čvora digrafa;*

2° *grana u_i $(i = 2, \ldots, k)$ počinje u onom čvoru u kojem se završava grana u_{i-1}.*

Put može više puta prolaziti istom granom ili kroz isti čvor. *Elementarni put* je put koji kroz svaki čvor grafa prolazi najviše jedanput.

Put koji se završava u istom čvoru u kojem i počinje naziva se *kružni* ili *zatvoreni* put.

Kao grana, u putu može da se pojavi i petlja.

U neorijentisanom grafu svaka grana se može shvatiti kao dvostrano orijentisana, pa put nije definisan samo nizom grana, nego se za svaku granu koja ulazi u posmatrani put mora naznačiti njena orijentacija u tom putu. Stoga se često za grafove koji sadrže neorijentisane grane put dužine k definiše kao naizmenični niz čvorova x_i i grana u_i oblika

$$x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots, x_k, u_k, x_{k+1},$$

pri čemu je za $i = 1, 2, \ldots, k$ čvor x_i početni, a x_{i+1} krajnji za granu u_i. Umesto toga, grane puta se mogu zadavati kao uređeni parovi čvorova.

Put povezuje čvor x_i sa čvorom x_j ako je x_i početni čvor prve grane u putu, a x_j završni čvor poslednje grane.

Definicija 9. *Neorijentisani graf je povezan ako se proizvoljna dva njegova čvora mogu povezati putem. Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem, graf je nepovezan.*

Nepovezan graf se sastoji od dva ili više odvojenih delova. Ovi odvojeni delovi nazivaju se *komponente povezanosti* grafa. Tačnije, komponenta povezanosti grafa kojoj pripada neki čvor x_i je podgraf obrazovan skupom svih onih čvorova koji se mogu spojiti putem sa čvorom x_i , uključujući tu i čvor x_i.

U vezi sa pitanjem povezanosti grafova interesantni su i sledeći pojmovi.

Definicija 10. *Artikulacioni čvor grafa je čvor čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenata povezanosti grafa.*

Definicija 11. *Most grafa je grana čijim se udaljavanjem povećava broj komponenata grafa. Grana koja je incidentna sa čvorom stepena* 1 *naziva se viseća grana.*

Za digrafove se definiše više vrsta povezanosti.

Definicija 12. *Digraf je jako povezan ako je svaki par čvorova x_i, x_j, spojen putem koji vodi iz x_i u x_j.*

Iz definicije sleduje da, pored egzistencije puta iz x_i u x_j, mora postojati i put koji vodi iz x_j u x_i.

Definicija 13. *Digraf je jednostrano povezan ako je svaki neuređen par čvorova x_i, x_j povezan putem bar u jednom smeru.*

Definicija 14. *Digraf je slabo povezan ako je povezan neorijentisan graf, dobijen od datog digrafa zamenom orijentisanih grana odgovarajućim neorijentisanim granama.*

Jako povezan digraf ima i osobine jednostrane i slabe povezanosti. Jednostrano povezan digraf je i slabo povezan. Slabo povezan digraf ne mora, međutim, biti i jednostrano povezan, a jednostrano povezan ne mora biti i jako povezan digraf.

Pitanje komponenata povezanosti se komplikuje kada se posmatraju digrafovi. Opisaćemo detaljnije *komponente jake povezanosti.*

U skupu X čvorova digrafa G uvedimo binarnu relaciju π pomoću sledeće definicije. Čvorovi x i y su u relaciji π ako i samo ako je $x = y$ ili se x i y nalaze na nekom zatvorenom putu digrafa G. Lako se proverava da je relacija π refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. ona predstavlja relaciju ekvivalencije. Podgrafovi digrafa G, indukovani klasama ekvivalencije ove relacije, predstavljaju komponente jake povezanosti digrafa G.

Svaka komponenta jake povezanosti je jako povezan digraf. Ovo potiče otuda što se svaka dva (različita) čvora iz iste klase ekvivalencije nalaze na nekom zatvorenom putu (tj. postoji put od jednog do drugog i obrnuto).

Lako se uviđa da se iz komponente u komponentu jake povezanosti može prelaziti uvek samo u jednom pravcu (ovde se podrazumeva da se kretanje izvodi po granama digrafa u smeru orijentacije grana). Ako se iz jedne komponente izađe, u nju se više ne može vratiti. Grana koja povezuje čvorove iz različitih komponenata ne leži ni na jednom zatvorenom putu. Stoga je ponekad zgodno da se komponente jake povezanosti konstruišu na sledeći način. Udalje se iz digrafa sve grane koje ne leže na zatvorenim putevima. Tada se digraf raspada na odvojene delove koji upravo i predstavljaju komponente jake povezanosti. Videti takodje 1.6.3.

Posmatrajmo ponovo neorijentisane grafove.

Neka su $d_1, \ldots, d_n$ stepeni čvorova $x_1, \ldots, x_n$ u neorijentisanom grafu (ili multigrafu) bez petlji koji ima m grana. Ako saberemo sve stepene čvorova, dobijamo dvostruki broj grana, jer svaka grana ima kao krajnje tačke dva čvora. Dakle, važi relacija

$$d_1 + \cdots + d_n = 2m. \tag{1}$$

Iz ove relacije neposredno sleduje

Teorema 1. *Broj čvorova neparnog stepena u konačnom neorijentisanom grafu (ili multigrafu) bez petlji je paran.*

Definicija 15. *Neorijentisan graf se naziva regularan stepena r ako je*

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_n = r.$$

Iz (1) sleduje da regularan graf stepena r ima $m = \frac{1}{2}nr$ grana.

Odavde se vidi da ne postoje za svako n i r regularni grafovi stepena r sa n čvorova. Potrebno je, naime, da bar jedan od brojeva n i r bude paran. Lako se može pokazati da je ovo i dovoljan uslov za egzistenciju pomenute klase grafova.

Posebno su interesantni regularni grafovi stepena dva.

Definicija 16. *Konačan, povezan, regularan graf stepena dva zove se kontura.*

Ako kontura ima n čvorova, oni se mogu označiti sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tako da je x_1 susedan sa x_2 , x_2 sa $x_3, \ldots, x_{n-1}$ sa x_n i x_n sa x_1. Za neke od ovih kontura upotrebljavaju se i nazivi iz geometrije: *trougao, četvorougao,* itd.

Graf koji ne sadrži nijednu konturu kao delimični podgraf naziva se *šuma.* Ako je graf, uz to, povezan, on se naziva *stablo.*