Мирко и Бранка Дејић

101 МАТЕМАТИЧКИ ИЗАЗОВ

Laguna

Садржај

Рекли су о математици 7
Предговор 9
Да ли имам дар за математику? 11
101 математички изазов 15
Одговори и решења 111
Литература 171

Рекли су о математици

Нема праве истине у оним наукама у којима се математика не примењује.

Леонардо да Винчи (1452–1519)

Природа је огромна књига у којој је записана наука. Она је стално отворена пред нашим очима, али је човек не може прочитати уколико претходно не научи језик и слова којим је написана. Написана је језиком математике, а њена су слова троуглови, кружнице и друге математичке фигуре.

Галилео Галилеј (1564–1642)

Математика је пут за целокупно људско знање.

Леонард Ојлер (1707–1783)

Математика – то је нешто посредством чега људи управљају природом и собом.

Андреј Николајевич Колмогоров (1903–1987)

Математика треба да се покорава полету нашег разума. Она је као штап за слепог. Без ње нико не може направити ни корак. Њој и експериментима дугујемо све што је сигурно у физици.

Франсоа Мари Аруе – Волтер (1694–1778)

Математика је наука младих. Друкчије не може ни бити. Бављење математиком – то је таква гимнастика ума за коју су потребни сва гипкост и сва издржљивост младости.

Норберт Винер (1894–1964)

Чуо сам да ме оптужују да сам био противник, непријатељ математике уопште, коју нико не би могао да цени више од мене, пошто она чини управо оно за шта уопште нисам способан.

Јохан Волфганг фон Гете (1749-1832)

Предговор

Постоје многе специфичне способности које карактеришу људе склоне математици. Издвојићемо неке: моћ апстраховања, логичко расуђивање, проналазачко мишљење, математичка интуиција, нумерички фактор, комбинаторно, дедуктивно и индуктивно мишљење, интересовање за математику, проналажење различитих и оригиналних решења проблема, постављање нових проблема (еластичност и креативност мишљења), осећај за узрок и последицу, способност образовања и праћења каузалног ланца чињеница итд. Све те способности користе се у мањој или већој мери и у свакој делатности којом се човек бави. Због тога је потребно да се стално развијају. Моћно средство за развијање математичких способности представљају тзв. нестандардни математички задаци.

У овој књизи налази се 101 такав задатак. Оно што је заједничко свима њима јесте њихова занимљивост, проблемски карактер, неочекиваност решења, загонетност и заводљив текст. Ови задаци су корисни за развијање математичког мишљења и одржавање сталног интересовања за математику. За њихово решавање често нису потребна специјална математичка знања, већ се ослањају на логичко мишљење, интуицију и „здрав разум“. За решавање задатака не може се користити шаблон, па чак и идеја из неког другог задатка. Сваки задатак је изазов за себе и представља нову проблемску ситуацију коју читалац треба да разреши. Ако проблем не решите брзо, нека остане у глави, сазреће тамо, јавиће се блесак решења ускоро. Пређите на други проблем и хватајте се укоштац с њим.

Књига, поред задатака које треба решавати, садржи и одређен број кратких математичких текстова. Њихови садржаји су чињенице из историје математике, анегдоте, поуке и друге занимљивости које могу да интересују читаоца. Циљ писања ових текстова има чисто образовни и културолошки карактер.

Напоменимо да се нестандардни задаци појављују у записима најстаријих цивилизација као што су Египат, Грчка, Кина, Индија и да се током векова стекао богат избор тих задатака. Иако се у неком облику слични задаци појављују у наведеној литератури на крају књиге, аутори су се трудили да већини задатака дају лични печат, у смислу формулације или решења.

При писању ове књиге имали смо на уму чињеницу да је интересовање за математику главни кључ за успех у овој области. Тај успех ће се транспоновати и на све друге области којима се бавите, јер – математика је свуда.

Књига је намењена свима који желе да изоштре и истанчају своје умне способности, а да се при томе и забаве.

Аутори

Да ли имам дар за математику?

До сада сте решавали много математичких задатака, а то сте радили јер волите математику. На следећа питања одговорите или са ДА или са НЕ. Сазнаћете да ли сте надарени за математику. Добар разлог да верујемо да јесте лежи у томе што је ова књига у вашим рукама.

1. Покушавате ли да решите задатак на више начина?
2. Проверавате ли да ли сте добро решавали задатак?
3. Волите ли да решавате теже и нестандардне задатке?
4. Да ли самостално попуњавате празнине у знању које изискују поједини математички проблеми?
5. Да ли волите да решите задатак без ичије помоћи?
6. Да ли сте истрајни у решавању задатака?
7. Да ли трагате за креативнијим путевима при решавању задатака?
8. Да ли дајете нестандардна решења?
9. Да ли брзо решавате задатке?
10. Имате ли изразиту жељу да први решите задатак?
11. Примењујете ли раније стечена знања, која вам помажу да одступите од шаблонског решавања задатка?

12. Да ли користите широку лепезу идеја стечених у ранијим решавањима задатака?
13. Колика је трајност знања, можете ли после извесног времена да решите исти или сличан задатак?
14. Можете ли сами да постављате проблеме?
15. Имате ли изражену досетљивост приликом решавања задатака?
16. Имате ли осећај задовољства када успешно решите тежак задатак?
17. Трагате ли у збиркама и књигама за тешким задацима?
18. Доводите ли до краја замишљен план решавања задатка?
19. Да ли брзо схватате задатак и постављате план за решавање?
20. Да ли дајете необичне идеје и необична решења?

Иако листа питања није исцрпљена, може у великој мери да нам помогне да закључимо да ли имамо дар за математику. Треба имати у виду да су и даровити различити међу собом. Неко ће брже, а неко спорије да решава неки задатак, нечија знања ће бити трајнија, нечија решења сажетија итд. Ако је на више од десет питања одговор позитиван, ви сте надарени за математику. Ако их нема толико, не брините, вероватно сте потенцијално даровити, само треба да се више заинтересујете за математику.

Неки истраживачи повезују способности за математику са степеном интересовања за њу. Тако је формулисан сет следећих питања на које треба одговорити са ДА или са НЕ.

а) Волите ли да решавате тешке математичке задатке?

б) Тражите ли помоћ при решавању тешких математичких задатака?

в) Ако не успете да решите тежак задатак данас, да ли се враћате његовом решавању сутра?

Упишите свој одговор: а) ______ б) ______ в) ______

Ако сте одговорили:

- ДА, НЕ, ДА – ваше су математичке способности *високе;*
- НЕ, НЕ, НЕ или НЕ, ДА, НЕ – ваше су математичке способности *просечне.*

Сви остали одговори – ваше способности су *повећане*.

101 математички изазов

1) Од 101 до ?

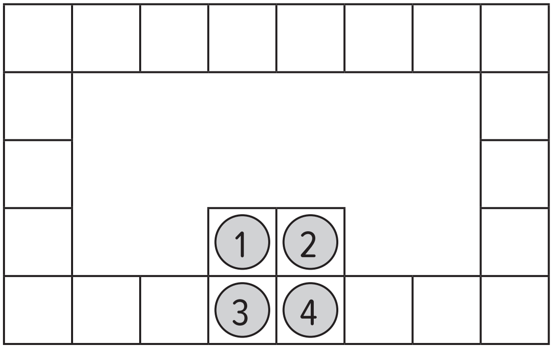
На почетку низа налази се број 101. Затим следе чланови:

21
1112
3112
211213
312213
??????

Одредите правило формирања чланова низа и уместо знакова питања ставите одговарајуће цифре.

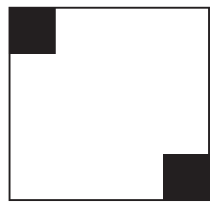
2) Замена места жетонима

Нумерисани жетони су распоређени као на слици. Треба заменити места жетонима 1 и 2, а такође и жетонима 3 и 4. Жетоне можемо да померамо директно на суседно поље, вертикално или хоризонтално (у једном потезу можемо да прођемо и више поља). Ако се жетон налази у пољу, не можемо да га прескачемо другим жетоном.



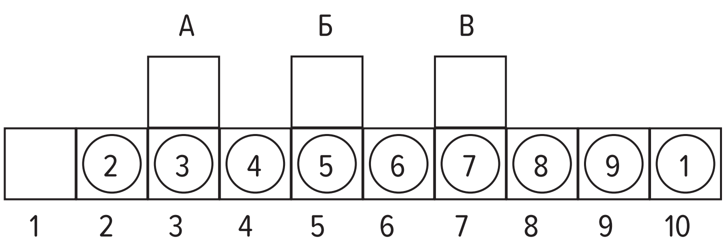
3) Распоред жетона на страницама квадрата

У кутији се налазе жетони, по више од сваке врсте, на којима су назначене њихове вредности: 1, 2, 3, 4 и 5. Треба их распоређивати дуж ивица квадратне табле тако да укупан збир вредности жетона на целој табли износи 10. Жетони не могу да се поставе у два црном бојом назначена угла. Ако се нађу у неком од два слободна угла квадрата, то значи да се налазе истовремено на обе ивице које граде тај угао. Збирови вредности жетона на свакој ивици су једнаки и износе: а) 3; б) 4; в) 5.

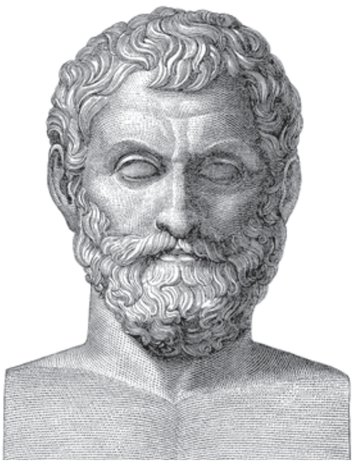


4) Јединица на првом месту

Нумерисани жетони су распоређени у поља, као на слици. Жетон, нумерисан бројем 1, треба довести са последњег поља 10 на прво место, нумерисано бројем 1. Када тај жетон дође на своје место остали жетони треба да се нађу такође на својим местима: 2 на броју 2, 3 на броју 3 итд. При померању жетона могу да се користе помоћна места А, Б и В. При кретању жетон клизи: лево-десно, горе-доле, косо не може да се креће, нити да се жетон износи ван шеме, а није допуштено ни прескакати једним жетоном преко другог жетона.

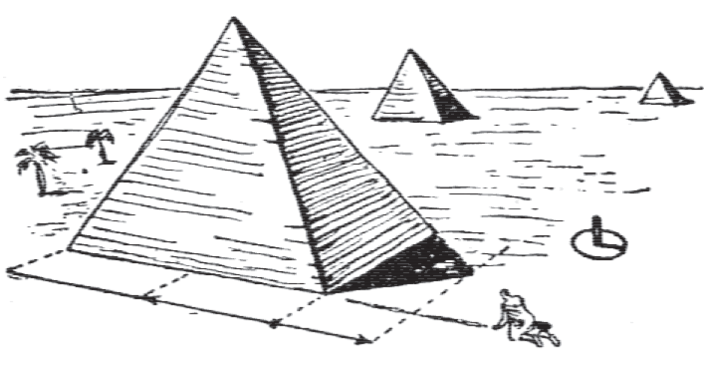


Талес, отац грчке математике



Први грчки математичар, отац грчке математике, како га још називају, јесте Талес Милетски (око 625 п. н. е.–548 п. н. е.). У младости је много путовао, а највише се задржавао у Египту желећи да упозна тамошња математичка знања. Знања која су Египћани поседовали љубоморно су чували египатски свештеници. Међутим, Талесу су та знања била доступна будући да су га Египћани прогласили за једног од седам мудраца, а мудраце су поштовали скоро као и своја божанства. Када се вратио у родни Милет, основао је филозофску школу. У Талесовим радовима први пут се у историји математике срећу докази теорема. Највише се бавио геометријом. Доказао је да су углови на основици једнакокраког троугла једнаки, да је збир углова у сваком троуглу 180 степени, да пречник дели круг на два једнака дела, да су углови над пречником прави, итд. За Талесово име везује се и теорема о подударности два троугла. Наиме, два троугла су подударна ако имају једнаке по једну страницу и по два угла који леже на тој страници. Ту теорему Талес је користио да одреди ширину реке налазећи се само са једне стране реке. Талес је и први грчки астроном. Предвидео је помрачење Сунца 28. маја 585. г. пре н. е. Његово име носи један кратер на Месецу. Мерио је пречнике Сунца и Месеца. Живећи крај мора, тврдио је да је све постало из воде, ништа не може без воде, а и ватра се гаси водом.

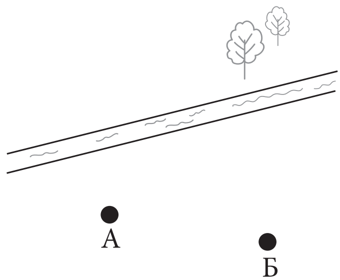
За Талеса се везује легенда о томе да је измерио висину Кеопсове пирамиде, о чему су Египћани маштали вековима. У знак захвалности Египћани Талеса проглашавају за мудраца. Задивљујућа је једноставност Талесове досетке да измери висину пирамиде. Узео је штап и удаљивши се од пирамиде, поставио га је вертикално у песак. Потом је описао круг чији је центар била управо тачка у коју је забоден штап. Полупречник круга био је једнак дужини штапа. Сео је потом у хлад пирамиде и повремено загледао свој круг. Одједном је скочио и почео да мери сенку пирамиде. Измерио је и присутнима саопштио висину пирамиде. Објаснио је свој поступак: „Када сам погледао у круг, видео сам да је сенка штапа, који је био у центру, додирнула његову линију. То је значило да је дужина штапа једнака дужини своје сенке. Тог тренутка су и дужине сенки осталих објеката једнаке висини својих оригинала, па и висина пирамиде је једнака дужини своје сенке.“ Измерио је ту сенку и добио висину пирамиде.



5) Најкраћи пут

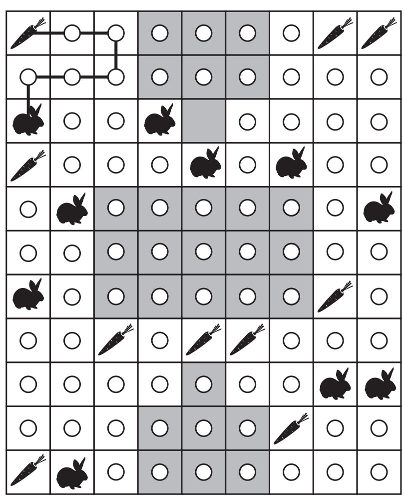
Становници два села, назовимо их А и Б, одлучили су да направе заједнички мост за прелаз преко реке, која тече праволинијски на извесној удаљености од оба села. Потребно је одредити место изградње моста тако да укупна дужина путева који ће спајати оба места са мостом буде најкраћа.

Како ће то урадити?



6) Зец и његова шаргарепа

Повежите сваког зеца са његовом шаргарепом, као што је започето у горњем левом углу. Пут до шаргарепе сваког зеца пролази кроз тачно пет кружића, и то тако да кроз сваки кружић може да се прође само једанпут и путеви не могу да се секу. Такође, путеви не пролазе кроз осенчена поља.



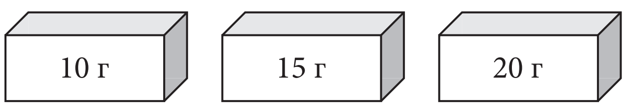
7) Вожња таксијем

Због мањка возила на такси станици, три путника, пошто су ишли у истом смеру, ушли су заједно у исто возило. Вожња првог путника била је 3 км, другог 5 км, а трећег 8 км. Један километар вожње стаје 101 динар. Путници су се договорили да поделе трошкове вожње (808 динара) сразмерно дужини својих путева.

Колико је платио своју вожњу сваки од путника?

8) Тачан запис на кутијама

Имамо три куглице на којима пише 5 г и још три куглице на којима пише 10 г. Све су стављене у три кутије, тако да их у свакој кутији буде по две. Иако је на све три кутије записана укупна маса куглица у њима, натписи на све три кутије су погрешни.



Како можемо одредити тачну масу куглица у кутијама, ако из једне од њих извучемо само једну куглицу?

9) Име кћери

Мајка Мирјана са ћерком и мајка Верица са ћерком сакупљале су орахе. Број ораха које је сакупила Мирјана завршавао се цифром 2, а број ораха које је сакупила њена кћи завршавао се цифром 3. Број ораха које је сакупила Верица завршавао се цифром 3, а број ораха које је сакупила њена кћи завршавао се цифром 4. Укупан број ораха, које су сакупиле све особе поклапа се с квадратом неког природног броја.

Како се зове Мирјанина кћи?

10) Наследство

Пре него што ће се породити, жени умре муж, али он пред смрт остави следећу опоруку: *У случају да се роди син, нека му припадну две трећине, а мајци трећина наследства; ако се роди кћерка, нека јој припадне трећина, а мајци две трећине наследства.*

Деси се да мајка роди близанце и то дечака и девојчицу.

Како ће поделити наследство, а да буде испоштована мужевљева жеља?

11) Број војника у касарни

Питали су пуковника колико има војника у касарни. Он је одговорио тајанствено: „Када бих војнике распоређивао по собама, тако да их буде по двојица у соби, остао би један. Слично, када бих војнике распоређивао тако да их буде по три, по четири, по пет, по шест, увек би преостао по један војник. Ако бих војнике распоређивао тако да их буде по седам у собама, сви би били распоређени.“

Покушајте да одгонетнете колико има војника у касарни.

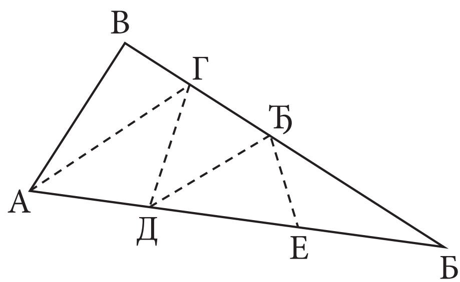
12) Производ и збир два броја

Ако се производу два природна броја дода њихов збир, добија се број 14.

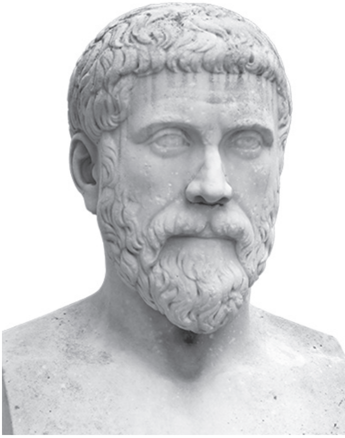
Који су то бројеви?

13) Подела троугла

Како ћете дати троугао АБВ поделити изломљеном линијом на 5 троуглова који имају исте површине? Уопште, како га можете делити на произвољан број једнаких делова?

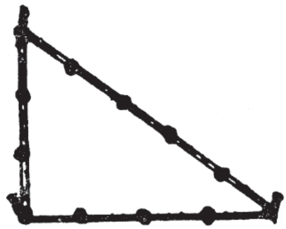


Мистични Питагора



Да ли је Питагора постојао или не, поуздано се не зна, али многе легенде у вези су с његовим именом. Сматра се да се родио око 580. г. пре н. е. У својој младости Питагора много путује у жељи да што више научи и сазна. Нарочито је много боравио у Вавилону и Египту. Антифон (око 479 п. н. е.– 411 п. н. е.) у свом спису *О најистакнутијим људима* каже да је Питагора научио језик Египћана. Нарочито су га фасцинирала мистична знања тадашњих египатских свештеника. Иначе, тврди се да је у Египту живео око двадесет две године. На Самосу оснива филозофско-математичку школу. Око себе је окупио око триста ученика.

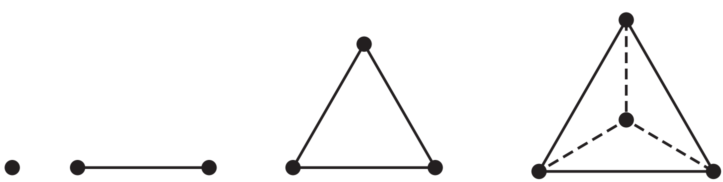
Питагориним именом названа је знаменита Питагорина теорема (квадрат хипотенузе једнак је збиру квадрата катета код правоуглог троугла). Доказ ове теореме приписује се Питагори, мада се за њу знало много раније. Петнаест векова пре њега Египћани су знали за ово правило. Захваљујући томе, лако су конструисали правоугли троугао чије су катете дужине 3 и 4, а хипотенуза 5. Поделили би канап чворовима на 12 једнаких делова, заболи кочиће као на слици и тако добили правоугли троугао, а тиме и конструисали прав угао.



Стари Египћани су знали за Питагорино правило

Египатске грађевине су свуда садржавале праве углове и врло је било значајно како их добити. Боравећи у Египту, Питагора је видео како они добијају правоугле троуглове у појединачним случајевима. Уочио је да правило може да се примени на било који правоугли троугао, и то је доказао.

Питагорејци су сматрали да бројеви и односи међу њима представљају суштину појавног света. Користили су само природне бројеве и њихове делове (разломке). Бројеве представљају геометријски. Један је тачка, два линија, три троугао, четири пирамида.

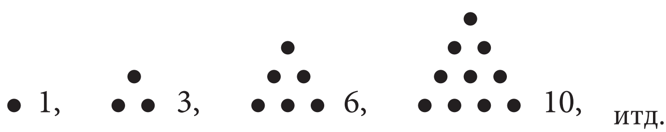


Геометријско представљање бројева

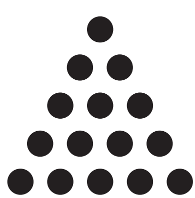
Како су, према схватању питагорејаца, све ствари састављене од геометријских фигура, а ове од бројева, следи да су све ствари бројеви.

Свет је потчињен истом закону коме су потчињени бројеви. Питагорејци бројеве деле на парне, непарне, парно-непарне, непарно-непарне, просте и сложене, савршене, пријатељске, троугаоне, четвороугаоне, петоугаоне, итд. Бројевима повезују аритметику и геометрију. Посебну пажњу поклањају бројевима које су представљали посебним распоредом тачкица и то тако да чине правилне геометријске фигуре. Такви су „троугаони“, „квадратни“, „петоугаони“, итд. Називају се још и фигуративним.

Бројеви који могу да се прикажу у облику троугла називају се троугаони бројеви.



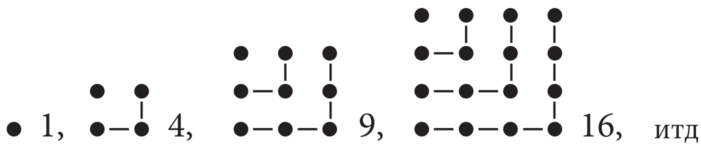
То су бројеви: 1, 3, 6, 10, 15, 21... Питагорејци су открили да је збир било којих *n* узастопних природних бројева увек троугаони број, односно да се троугаони бројеви могу записати у облику: $Tn = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Тако, троугаони број 15 може да се добије сабирањем првих 5 природних бројева:



1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

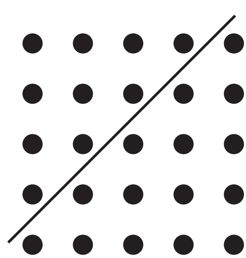
Троугаони број састављен од 10 тачкица Питагорејци су посебно ценили. Носио је назив тетрактис. Овај број је за питагорејце био божанствен, од њега су тражили благослов и сматрали да садржи корен и извор вечног тока стварања помоћу четири елемента: ватре, воде, ваздуха и земље.

Бројеви који се могу приказати у облику квадрата називају се квадратни бројеви. То су бројеви: 1, 4, 9, 16, 25, 36...

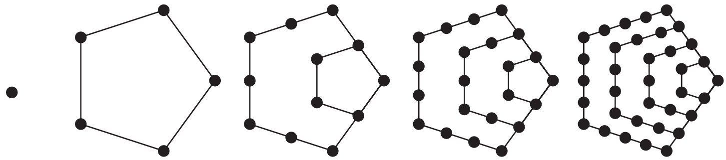


Питагорејци су открили да је збир првих *n* непарних бројева квадратни број, односно, квадратни бројеви могу бити записани на следећи начин:
$K_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

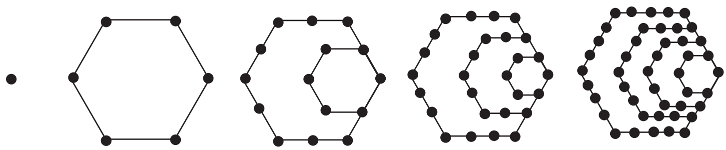
Такође, на основу сликовног представљања бројева, питагорејци су открили и везу између троугаоних и квадратних бројева: збир свака два узастопна троугаона броја је квадратни број. На пример на следећој слици уочавамо да је збир троугаоних бројева 10 и 15 квадратни број 25:



Петоугаони бројеви могу да се прикажу у облику петоуглова. То су бројеви: 1, 5, 12, 22, 35...



Шестоугаони бројеви се приказују у облику шестоуглова. То су бројеви: 1, 6, 15, 28, 45...



Поштовање бројева доводи питагорејце до тога да појединим бројевима придају извесне симболичке особине:

Број 1 је извор свих бројева. Он заправо није број, већ недељиво божанство. Два је први парни број. Парни бројеви су женски бројеви, па је 2 уједно први женски број. Иначе, парни бројеви су, према схватању питагорејаца, зли бројеви. Два представља мисао и линију. И једно и друго су „безгранични и неодређени“. Број 3 је први мушки број, јер „садржи почетак, средину и крај“. Број 4 је број „правде“. Једнак је производу два броја ($4 = 2 \times 2$) која у потпуности држе равнотежу један другом. Број 4 је први број дељив на једнаке делове. Број 5 представља број „брака“. Једнак је збиру броја 2 – првог женског броја и броја 3 – првог мушког броја. Број 6 је број посвећен души. Број 7 је број невиности. Није ни чинилац ни производ бројева до 10. Питагорејци су уочили да цела природа одише бројем 7. Број 8 садржи „тајну љубави и пријатељства“, први је куб 2^3. Број 9 је број материје. Први је квадрат непарног броја 3. Број 10 је број којим се изражава материја.

То је идеалан број, а као такав морао је симболизовати 10 небеских тела. За њих постоји централни огањ око кога се обрћу Земља, Сунце, Месец и пет планета које су у старој Грчкој биле познате. Као десето тело питагорејци сматрају да постоји „Антиземља" која се не види, јер је увек са супротне стране огња у односу на Земљу.

Као што је космос уређен у складу са бројем, тако, по Питагорином схватању, мора бити и са душом. Дух је сам по себи складан.

Бројеви су „солидарни" ако је збир делитеља једног једнак другом броју, а збир делитеља другог једнак првом броју. На пример, 220 и 284 су „солидарни". Делитељи броја 220 су 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110. Њихов збир је 284. Слично, делитељи броја 284 су 1, 2, 4, 71 и 142. Њихов збир даје број 220.

Број 36 је уживао посебан третман код питагорејаца. Тај број је за њих био „фасцинантан". С једне стране, он је једнак збиру кубова прва три броја: $1^3+2^3+3^3=36$, а са друге, збир прва 4 парна и прва 4 непарна броја, тј. $(2+4+6+8)+(1+3+5+7)=36$. Питагорејци су бројем 36 изрицали страшне клетве. Такође, по мишљењу питагорејаца, свет се заснива на прва 4 парна и прва 4 непарна броја. Зачетници су тајног друштва, чији је циљ био морално спасење. Када се неко примао у друштво, морао се заветовати на ћутање од три године. Током ренесансе број 1095 ($3 \cdot 365$) сматрао се за број ћутања.

Посебно место међу бројевима код питагорејаца заузимали су они које су називали „савршени". То су бројеви који су једнаки збиру својих делилаца. Прва четири савршена броја, за које су знали питагорејци, су:

$6 = 1 + 2 + 3,$

$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$

$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248,$

$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064.$

Савршенство броја 6 искористио је свети Августин у *Божјем граду* доказујући зашто је Богу било потребно шест дана да створи свет, мада је због своје свемоћи то могао да уради и одједном. Бог је за шест дана стварао свет, јер је желео да покаже савршенство своје творевине. По светом Августину, број 6 није постао савршен због божје одлуке да свет ствара шест дана, већ је обрнуто, Бог за шест дана ствара свет због савршенства броја 6 самог по себи.

Са увећавањем бројева савршени бројеви се све теже проналазе. Тако, пети савршени број је 33.550.336, а шести 8.589.869.056. Осамнаести савршен број има 1937 цифара.

Питагорејци, поред својства да су савршени бројеви једнаки збиру сопствених делилаца, откривају и низ других својстава ових бројева. На пример, савршени бројеви увек представљају збир неколико узастопних целих бројева:

$6 = 1 + 2 + 3,$

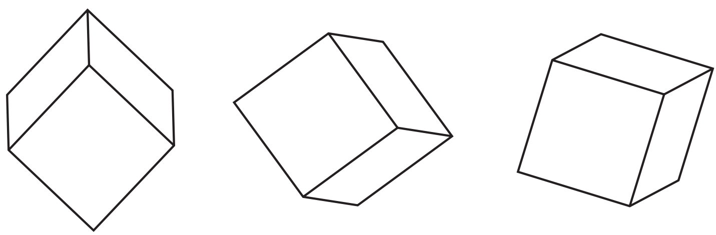
$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7,$

$496 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \ldots + 30 + 31,$

$8128 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \ldots + 126 + 127.$

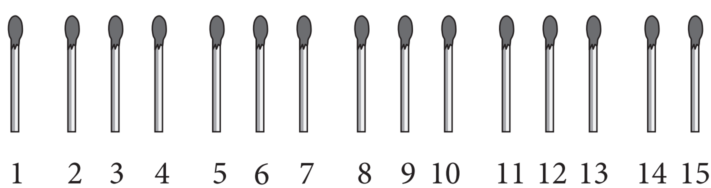
14) Стране коцки

На три коцке за игру видимо по три стране. Треба открити садржај тих страна. Зна се да је збир тачкица на три видљиве стране једне коцке различит од збира тачкица на три видљиве стране сваке друге коцке. Укупан збир тачкица које се виде на све три коцке износи 40. Одредите шта се налази на видљивим странама коцки.



15) По три шибице у групи

Петнаест шибица распоређено је у ред, као на слици.



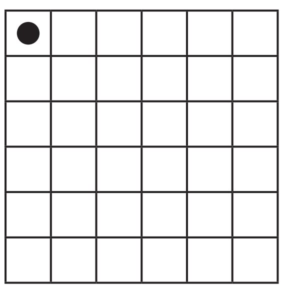
Треба их укрстити тако да добијете пет група од по три шибице. У једном потезу можете да преместите само једну шибицу. Притом увек морате да прескочите три шибице и да шибицу коју премештате ставите на четврту, или на пар шибица.

16) Од шест шибица четири троугла

Од шест шибица направите четири једнакостранична троугла. Троуглови међусобно не морају да буду једнаки.

17) Побеђује онај ко последњи помери фигуру

У углу квадратне мреже $n \times n$ налази се жетон. Два играча играју следећу игру: наизменично померају жетон на суседно поље (или хоризонтално или вертикално). Жетон не сме да се нађе два пута на истом пољу. Игру губи онај играч који у свом редном потезу нема где да стави жетон. Доказати да, ако је n паран број, играч који започиње игру има стратегију за победу, а ако је n непаран број, ту стратегију има други играч.

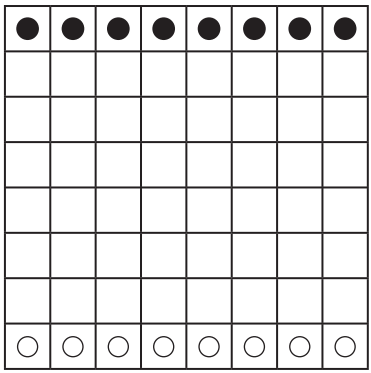


Квадратна мрежа 6×6

18) Губи онај ко не може да помери своју фигуру

На шаховској табли 8×8 стоји осам белих и осам црних пешака. Два играча играју наизменично (започиње бели) следећу игру:

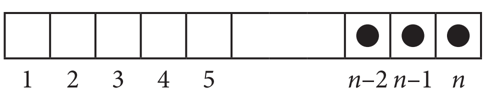
У једном потезу играч помера једну своју фигуру по вертикалној колони за једно или више поља напред или назад. Није дозвољено: скидање фигуре са табле, заробљавање фигуре, као и прескакање фигуре противника. Игру губи онај играч који не може да одигра свој редни потез. Доказати да играч који игра црним фигурама има стратегију до победе.



Почетни распоред фигура за игру

19) Победник је ко одигра последњи потез

Правоугаона табла, размере $1 \times n$ $(n \geq 4)$ састављена је из поља нумерисаних од 1 до n.



Почетак игре

На последња три поља (n–2, n–1, n) налази се по један жетон. Игру играју наизменично два играча. Сваки играч у свом потезу може да пренесе произвољан жетон у било које слободно поље које се налази лево од тог поља. Игру губи онај играч који не може да одигра свој редни потез (попуњена су поља 1, 2, 3 и нема где да се пренесе жетон). Доказати да играч који започиње игру може играти тако да увек победи противника (има оптималну стратегију).

20) Ко први стиже до 101

Два играча играју следећу игру:

Наизменично изговарају по један број, не већи од 10, и тај број сабирају са свим претходно изговореним бројевима. На пример, први играч изговара број 3, други 6, збир је 9. Затим, први играч изговара број 10, збир је $9+10=19$, итд. Ко од играча изговори последњи број који са свим претходно изговореним даје збир 101, победник је.

Како треба играти да победи први играч?

21) Године деце

Отац има троје деце. Производ њихових година је 30. Једно дете је старо колико друга два заједно. Два старија детета имају заједно 6 година више него најмлађе.

Колико година имају деца?