

Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet

Dr Mirjana Vukićević  
Dr Sanja Jocković

**KONSTITUTIVNI MODELI ZA TLO II**  
**ELASTO-PLASTIČNI MODELI SA**  
**IMPLEMENTACIJOM U NUMERIČKOJ**  
**ANALIZI**

AKADEMSKA MISAO  
Beograd, 2021.

Dr Mirjana Vukićević  
Dr Sanja Jocković

**KONSTITUTIVNI MODELI ZA TLO II**  
**ELASTO-PLASTIČNI MODELI SA IMPLEMENTACIJOM**  
**U NUMERIČKOJ ANALIZI**

*Recenzenti:*

Dr Selimir Lelović  
Dr Miroslav Živković  
Dr Dragan Rakić

*Izdavači*

Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet  
AAkademski misao, Beograd

*Štampa*

Planeta print, Beograd

*Tiraž*

300 primeraka

ISBN 978-86-7466-881-8

---

NAPOMENA: Fotokopiranje ili umnožavanje na bilo koji način ili ponovno objavljivanje ove knjige u celini ili u delovima - nije dozvoljeno bez saglasnosti i pismenog odobrenja izdavača.

---

## PREDGOVOR

Sadejstvo konstrukcije i tla postoji kod svih vrsta građevinskih objekata, bilo da su objekti saobraćajne infrastrukture, hidrotehnički objekti ili objekti visokogradnje. U kojoj meri i na koji način ponašanje tla utiče na ponašanje konstrukcije zavisi od vrste tla na kome (ili u kome) se gradi objekat, konstruktivnog sistema, vrste opterećenja kao i od načina izvođenja objekta. Uspostavljanje realnih veza između napona i deformacija, odnosno konstitutivno modeliranje tla, ima veliki značaj za ocenu nosivosti, upotrebljivosti i trajnosti objekata.

Razvoj računara i numeričkih metoda za proračun konstrukcija doprineli su ubrzanom razvoju i primeni složenijih i tačnijih konstitutivnih modela za tlo. Gotovo je nemoguće za sve vrste tla formirati jedinstven konstitutivni model, a da on istovremeno omogućava relativno jednostavnu primenu u projektantskoj inženjerskoj praksi.

U literaturi postoji veliki broj predloženih modela, koji se mogu svrstati u tri velike grupe: elastični, elasto-plastični i ostali modeli koji se zasnivaju na interakciji čestica, mehanici loma ili termodinamici. U praksi se još uvek najčešće koriste elastični modeli zbog njihove jednostavnosti, ali se sve više primenjuju elasto-plastični modeli koji su implementirani u komercijalne softverske pakete za proračun konstrukcija. Većina komercijalnih softvera ima u ponudi neke od više ili manje složenih konstitutivnih modela. Kod projekatata se vrlo često javlja dilema oko izbora modela za konkretan problem. Imajući to u vidu, postoji potreba da se domaća stručna javnost upozna sa teorijskim osnovama konstitutivnog modeliranja tla, vrstama modela i njihovom implementacijom.

U domaćoj literaturi je do sada objavljena samo jedna knjiga koja se bavi temom konstitutivnog modeliranja tla, *Konstitutivni modeli tla, I deo – Elastični modeli*, M. Lazović, M. Vukićević (1997) koja je obuhvatila klasu elastičnih modela (Cauchy-ev model, Green-ov "hiper" elastični model, linearno elastični modeli, hipoelastični modeli). Knjiga koja se bavi elasto-plastičnim modelima predstavlja logički nastavak najavljen u prethodnoj knjizi. Knjiga je namenjena građevinskim inženjerima koji se bave rešavanjem geotehničkih problema primenom numeričkih metoda i ima za cilj da pomogne u razumevanju kompleksne oblasti naponsko-deformacijskog ponašanja tla.

Knjiga je podeljena na pet poglavlja. U prvom poglavlju data su opšta razmatranja vezana za naponsko-deformacijsko ponašanje tla, u kome su na sažet način navedene sve bitne fizičko-mehaničke osobine tla kao specifičnog materijala i njihov uticaj na ponašanje tla. Osim toga, opisane su i teorijske postavke konstitutivnog modeliranja kojima se tlo tretira kao elasto-plastični kontinuum. U drugom poglavlju dat je istorijski pregled razvoja elasto-plastičnih konstitutivnih modela sa sažetim prikazom klasa modela u zavisnosti od vrste tla i uslova opterećenja. U trećem poglavlju detaljno su analizirani odabrani modeli sa aspekta primenljivosti za određene vrste tla, pogodnosti za primenu u numeričkim metodama i dostupnosti (pouzdanosti) ulaznih parametara. Čvrto poglavlje se bavi primenom elasto-plastičnih modela u numeričkoj analizi metodom konačnih elemenata (MKE). Za primenu elasto-plastičnih modela u MKE neophodno je izvršiti numeričku

integraciju napona (konstitutivnih relacija), jer su u osnovnim jednačinama modela osnovne nepoznate veličine naponi, a u MKE deformacije, odnosno pomeranja. U ovom poglavlju prikazane su najpoznatije metode za integraciju napona, kao i primena pogodnih metoda na nekoliko odabranih modela. U petom poglavlju prikazan je postupak vrednovanja modela da bi se on koristio u numeričkoj analizi, koji se sprovodi postupkom validacije (slaganje ponašanja modela sa ponašanjem realnog tla) i verifikacije (utvrđivanje da li su svi parametri i relacije konstitutivnog modela tačno definisani i implementirani u program za numeričku analizu). Na kraju su u prilogu dati algoritmi numeričke integracije napona za dva konstitutivna modela, MCC (Modified Cam Clay) i HASP (originalni model autora), kao i kod napisan Fortran programskim jezikom za integraciju MCC i HASP modela.

#### Autori

dr Mirjana Vukićević, dipl. građ. inž.  
dr Sanja Jocković, dipl. građ. inž.

## Sadržaj

<b>1. OPŠTA RAZMATRANJA NAPONSKO-DEFORMACIJSKOG PONAŠANJA TLA</b> .....	<b>1</b>
1.1 UVOD.....	1
1.2 TEORIJSKE OSNOVE .....	3
1.2.1 Principi mehanike kontinuuma .....	5
1.2.2 Elasto-plastično ponašanje tla.....	9
1.2.3 Princip efektivnih napona .....	14
1.2.4 Koncept kritičnog stanja .....	14
1.2.5 Kriterijumi loma za tlo.....	17
1.3 PONAŠANJE PREKONSOLIDOVANIH GLINA I ZBIJENIH PESKOVA .....	19
1.4 ZAVISNOST KRUTOSTI TLA OD VELIČINE DEFORMACIJA .....	23
Reference .....	27
<b>2. PREGLED RAZVOJA KONSTITUTIVNIH MODELA</b> .....	<b>30</b>
2.1 UVOD.....	30
2.2 PRVA GENERACIJA KONSTITUTIVNIH MODELA .....	30
2.3 DRUGA GENERACIJA KONSTITUTIVNIH MODELA .....	32
2.4 TREĆA GENERACIJA KONSTITUTIVNIH MODELA .....	34
2.5 HIPERPLASTIČNI I HIPOPLASTIČNI MODELI.....	35
Reference .....	37
<b>3. ELASTO-PLASTIČNI KONSTITUTIVNI MODELI ZA TLO</b> .....	<b>40</b>
3.1 UVOD.....	40
3.2 MOHR-COULOMB-ov MODEL .....	40
3.2.1 Mohr-Coulomb-ov kriterijum loma.....	40
3.2.2 Generalisani Mohr-Coulomb-ov (MC) konstitutivni model .....	41
3.2.3 Parametri MC modela.....	42
3.3 DRUCKER-PRAGER-ov MODEL .....	44
3.3.1 Parametri Drucker-Prager-ovog modela.....	45
3.4 HARDENING SOIL (HS) MODEL .....	45
3.4.1 Smičući mehanizam ojačanja (zbijena i prekonsolidovana tla).....	47
3.4.2 Kompresioni mehanizam ojačanja (normalno konsolidovana tla).....	49

---

3.4.3 Parametri HS modela .....	51
3.5 HARDENING SOIL SMALL (HSS) MODEL .....	52
3.5.1 Parametri HSS modela .....	53
3.6 CAM CLAY (CC) MODEL.....	54
3.6.1 Zakon tečenja .....	54
3.6.2 Zakon ojačanja .....	55
3.6.3 Elastične karakteristike .....	55
3.7 MODIFIKOVANI CAM CLAY (MCC) MODEL .....	55
3.7.1 Zakon tečenja .....	56
3.7.2 Zakon ojačanja .....	56
3.7.3 Parametri MCC modela.....	58
3.8 HASP MODEL .....	62
3.8.1 Zakon ojačanja za površ tečenja.....	64
3.8.2 Koncept parametra stanja .....	67
3.8.3 Parametar stanja za imaginarnu tačku .....	69
3.8.4 Stepen prekonsolidacije.....	71
3.8.5 Parametar stanja i ponašanje prekonsolidovanih glina.....	73
3.8.6 Koeficijent ojačanja $\omega$ .....	74
3.8.7 Karakteristike HASP modela u dreniranim uslovima .....	75
3.8.8 Karakteristike HASP modela u nedreniranim uslovima.....	78
3.8.9 Parametri HASP modela .....	80
3.9 MODEL ZA CIKLIČNA OPTEREĆENJA.....	81
3.9.1 Granična površ i površ tečenja .....	82
3.9.2 Zakon tečenja .....	83
3.9.3 Kinematičko ojačanje .....	83
3.9.4 Izotropno ojačanje .....	84
3.9.5 Promena plastičnog modula .....	84
3.9.6 Elastične karakteristike .....	86
3.9.7 Parametri modela .....	86
3.10 “BUBBLE” MODEL .....	87
3.10.1 Granična površ i površ tečenja.....	87
3.10.2 Zakon tečenja .....	87
3.10.3 Zakon ojačanja .....	88
3.10.4 Elastične karakteristike .....	89
3.10.5 Parametri “Bubble” modela .....	89

3.11 PROŠIREN SEKIGUCHI-OHTA MODEL .....	89
3.11.1 Površ tečenja .....	90
3.11.2 Zakon tečenja .....	90
3.11.3 SMP kriterijum i transformisani naponski prostor.....	91
3.11.4 Parametri Sekiguchi-Ohta modela .....	94
Reference .....	95
<b>4. INTEGRACIJA KONSTITUTIVNIH RELACIJA ELASTO-PLASTIČNIH MODELA KOD REŠAVANJA MATERIJALNO NELINEARNIH PROBLEMA METODOM KONAČNIH ELEMENATA .....</b>	<b>99</b>
4.1 UVOD .....	99
4.2 EULER-ova INTEGRACIJA UNAPRED.....	102
4.3 METODA GENERALIZOVANOG TRAPEZNOG PRAVILA.....	103
4.4 METODA GENERALIZOVANOG PRAVILA SREDNJE TAČKE.....	104
4.5 METODA POVATNOG PRESLIKAVANJA.....	105
4.6 IMPLICITNE METODE .....	107
4.6.1 Metoda vodećeg parametra (GPM metoda).....	108
4.7 PRIMENA METODE VODEĆEG PARAMETRA NA ODABRANIM KONSTITUTIVNIM MODELIMA .....	111
4.7.1 Integracija konstitutivnih relacija Modifikovanog Cam Clay modela.....	111
4.7.2 Integracija konstitutivnih relacija modela za ciklična opterećenja (Mroz, Norris i Zienkiewicz) .....	118
4.7.3 Integracija konstitutivnih relacija HASP modela .....	123
Reference .....	132
<b>5. VALIDACIJA I IMPLEMENTACIJA HASP MODELA .....</b>	<b>133</b>
5.1 UVOD .....	133
5.2 VALIDACIJA HASP MODELA .....	133
5.2.1 Materijali korišćeni za validaciju.....	134
5.3 IMPLEMENTACIJA HASP MODELA.....	139
5.3.1 Verifikacija postupka numeričke integracije metodom GPM.....	139
5.3.2 Primer primene HASP modela – Konsolidacija sloja gline.....	146
Reference .....	157

<b>Prilog 1. ALGORITAM NUMERIČKE INTEGRACIJE HASP I MCC</b>	
<b>MODELATLA .....</b>	<b>158</b>
A.1 Algoritam za proračun napona i funkcije tečenja u konfiguraciji $t+\Delta t$ za poznati vodeći parametar .....	158
A.2 Algoritam za numeričku integraciju HASP modela.....	159
A.3 Algoritam za numeričku integraciju MCC modela.....	160
UMAT for Abaqus – Fortran code for HASP model.....	161
UMAT for Abaqus – Fortran code for MCC model .....	171
DICTIONARY for Fortran code.....	181
<b>LISTA SIMBOLA .....</b>	<b>183</b>