Ćemal Dolićanin

Miljan Knežević   Nenad Cakić

FUNDAMENTI MATEMATIČKE ANALIZE III

Akademska misao
Državni univerzitet u Novom Pazaru
Beograd, 2020.

Ćemal Dolićanin • Miljan Knežević • Nenad Cakić

FUNDAMENTI MATEMATIČKE ANALIZE III

Recenzenti

prof. dr Stevan Pilipović, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu i redovni član SANU

prof. dr Gradimir Milovanović, redovni profesor univerziteta u Nišu i redovni član SANU

prof. dr Miloš Arsenović, redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu

prof. dr Ljubiša Kočinac, profesor emeritus PMF-a univerziteta u Nišu

Izdavači

Akademska misao, Beograd

Državni univerzitet u Novom Pazaru, Novi Pazar

Štampa

Akademska misao, Beograd

Tiraž

100 primeraka

ISBN 978-86-81506-01-1

Odlukom Senata Državnog univerziteta u Novom Pazaru br. 539/20-01 od 25.02.2020. godine, rukopis je odobren za štampu kao univerzitetski udžbenik.

Sadržaj

Predgovor

Materijal koji obuhvata ova knjiga uglavnom se predaje na Departmanu za matematičke nauke Državnog univerziteta u Novom Pazaru, a u okviru predmeta ,,Matematička analiza III", studentima studijskih programa Matematika i Informatika-matematika.

Inače, knjiga će biti od značaja i za studente prirodno-matematičkih, računarsko-informatičkih, tehničkih i srodnih fakulteta.

Knjigu čine dva dela:

I Metrički prostori,

II Teorija Furijeovih redova.

Prvi deo *Metrički prostori* sadrži dva poglavlja: *Uvodni pojmovi* i *Definicija i primeri metričkih prostora.*

U uvodnom poglavlju prvog dela, zbog značaja za opšte obrazovanje studenata matematike, izloženi su najvažniji matematički pojmovi, koji se u nekoj meri sreću u više matematičkih disciplina, kao što su: skupovi, preslikavanja i kardinalni brojevi.

U drugom poglavlju prvog dela, kao prirodna generalizacija raznih prostora koji se proučavaju u matematičkoj analizi, uveden je metrički prostor, kao skup za čija svaka dva elementa je određeno rastojanje, koje po ispunjenosti određenih osobina (str. 39) zovemo *metrika.*

Zahvaljujući prethodnom, možemo razmatrati mnoge posebne slučajeve istog fenomena, uz prethodno usaglašenu odgovarajuću terminologiju i oznake.

Tako su objedinjeni klasični rezultati matematičke analize, vezani za fundamentalne pojmove: granična vrednost, neprekidnost, konvergencija, te osobine prostora, kao što su: kompletnost, kompaktnost, povezanost itd.

Naročiti značaj za razvoj funkcionalne analize podstakla je činjenica da tačke prostora mogu biti i beskonačni nizovi, a ne samo brojevi, te je zbog toga teorija potkrepljena primerima, karakterističnim za funkcionalnu analizu.

Drugi deo knjige obuhvata *Teoriju Furijeovih redova.*

U uvodnom poglavlju objašnjen je značaj izučavanja Furijeovih redova za pojmove kao što su signal i njegova reprezentacija, zatim periodična i harmonijska kretanja. Ovo poglavlje sadrži osnovne definicije i osobine realnog i kompleksnog trigonometrijskog reda.

Drugo poglavlje je takođe uvodnog karaktera, u kojem su dati osnovni pojmovi ortogonalnih sistema funkcija.

U trećem poglavlju predstavljeno je razvijanje funkcije u Furijeov red, što je potkrepljeno solidnim brojem odgovarajućih primera. Uveden je pojam jezgra i integrala Dirihlea, a zatim su izložene njihove osnovne osobine.

Četvrto poglavlje odnosi se na konvergenciju Furijeovih redova. Izloženi su elementi *tačkaste* i *uniformne* konvergencije Furijeovih redova, kao i bitne razlike ovih pojmova. Takođe, na kraju poglavlja predstavljeno je diferenciranje i integraljenje Furijeovih redova.

Poslednje, peto poglavlje u drugom delu knjige odnosi se na Furijeov integral i Furijeovu transformaciju, sa primenama na Z-transformaciju. Dokazana je i čuvena Puasonova sumaciona formula.

Autori se posebno zahvaljuju saradnicima prof. dr Đorđu Krtiniću, doc. dr Dženisu Pučiću, dr Emiru Zogiću i master mat. Enesu Kačaporu koji su, ne samo tehnički, već i stručno, a čitajući detaljno rukopis, doprineli da budu ispravljeni i neki suštinski nedostaci.

Na kraju, posebnu zahvalnost izražavamo recenzentima: prof. dr Stevanu Pilipoviću, redovnom članu SANU, prof. dr Gradimiru Milovanoviću, redovnom članu SANU, prof. dr Milošu Arsenoviću, redovnom profesoru Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu i prof. dr Ljubiši Kočincu, profesoru emeritusu Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu, koji su pažljivim čitanjem i otklanjanjem uočenih primedbi doprineli da se rukopis učini značajno kvalitetnijim.

U Novom Pazaru, mart 2020. *Autori*

Deo I
Metrički prostori

Glava 1

Uvodni pojmovi

Jedan od važnijih pojmova koji se vezuju za realnu pravu jeste pojam konvergencije niza tačaka, koji se zasniva na rastojanju dveju tačaka nezavisno od drugih osobina skupa realnih brojeva. Pojam rastojanja i osobine vezane za rastojanje mogu se, nakon adekvatnog definisanja, uvesti i u druge skupove. Najvažniji pojmovi, koji čine stub izučavanja matematičke analize, jesu pojam konvergencije i neprekidnosti funkcija.

Navedeni pojmovi, kao i mnogi drugi, zasnivaju se na nekim, za njih opštim ispitivanjima, koje intuitivno poimamo kao bliskost tačaka nekog skupa.

Istaknimo da su konvergencija i neprekidnost veoma važni za ovladavanje metričkim prostorima, koji predstavljaju osnovu matematičke discipline – topologije.

Kako je pojam neprekidnosti funkcija vezan za procenu lokalnog odstupanja jedne funkcije od konstante koju čine njena vrednost u fiksnoj tački x_0, to skupovi Df i Vf (domen i kodomen funkcije f) moraju biti takvi da ima smisla govoriti o rastojanju njihovih tačaka, što vodi pojmu metričkog prostora, tj. generalizaciji geometrijskih prostora:

1) prava,

2) ravan,

3) trodimenzionalni prostor.

Ako su A i B tačke realne prave sa koordinatama x_1 i x_2, tada se njihovo rastojanje, u oznaci $d(A,B)$, definiše formulom

$$d_1(A,B) = |x_2 - x_1|.$$

Analogno, ako su $A(x_1,x_2)$ i $B(y_1,y_2)$ tačke u ravni, tada je

$$d_2(A,B) = \left(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2\right)^{1/2}.$$

U prostoru imamo da je rastojanje tačaka $A(x_1, x_2, x_3)$ i $B(y_1, y_2, y_3)$ dato sa

$$d_3(A, B) = \left(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + |x_3 - y_3|^2\right)^{1/2}.$$

Najvažnija zajednička svojstva navedenih rastojanja tačaka A i B su:

(1) $d(A, B) \geq 0,\ d(A, B) = 0$ ako i samo ako je $A = B$,

(2) $d(A, B) = d(B, A)$,

(3) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

Kada govorimo o rastojanju tačaka ma kog skupa, napred navedena svojstva rastojanja $d(A, B)$ tačaka A i B pokazuju se veoma bitnim i pri tome skup X na kojem je definisano rastojanje između njegovih tačaka, sa osobinama (1), (2) i (3), zovemo *metrički prostor*. Koristeći rastojanje, u svakom metričkom prostoru se može definisati konvergencija nizova, kao i neprekidnost funkcija, čiji su domeni i kodomeni metrički prostori.

U ovom uvodnom poglavlju kratko ćemo izložiti elementaran pregled skupova, relacija i funkcija, za koje, iako su u prethodnim kursevima dosta obrađeni, smatramo da ipak mogu koristiti radi podsećanja.

1.1 Skupovi

Izbegavajući aksiomatsko zasnivanje teorije skupova, o čemu je bilo dovoljno detaljno reči u prethodnim matematičkim kursevima, ovde ćemo izlaganje zasnivati na intuitivan način.

Tako, intuitivno poimamo da skup predstavlja kolekciju objekata koji imaju neko zajedničko svojstvo, ili su pobrojani. Skupove označavamo velikim slovima: X, Y, Z, M, ...

Objekte skupa X zovemo njegovim članovima ili elementima i označavamo ih malim slovima latinice: x, y, z, m, ... Činjenicu da je x član, tj. element, skupa X simbolično označavamo sa $x \in X$, a njegovu negaciju $x \notin X$. Simbole $\in$ i $\notin$ čitamo kao: *pripada* i *ne pripada*. Inače, skup X je određen ako i samo ako možemo konstatovati da mu neki objekat pripada ili ne pripada.

Za skup čiji elementi imaju neko zajedničko svojstvo često koristimo oznaku

$$X = \{x \mid p(x)\},$$

pri čemu kažemo da je X skup svih objekata x za koje važi svojstvo $p(x)$. Skupove koji sadrže jedan i samo jedan element x zovemo *jednočlani skupovi* i koristimo