Ć. Dolićanin, Đ. Dugošija, J. Vukmirović

FUNDAMENTI MATEMATIČKE ANALIZE I

Akademska misao
Državni univerzitet u Novom Pazaru
Beograd 2018.

Ćemal Dolićanin, Đorđe Dugošija, Jovan Vukmirović

FUNDAMENTI MATEMATIČKE ANALIZE I

Recenzent
Prof. dr Miloš Arsenović

Izdavači
Akademska misao, Beograd
Državni univerzitet u Novom Pazaru, Novi Pazar

Štampa
Akademska misao, Beograd

Tiraž
200 primeraka

ISBN 978-86-7466-740-8

SADRŽAJ

Predgovor

Ovaj udžbenik predstavlja savremen uvod u matematičku analizu. Namenjen je studentima matematike i srodnih oblasti , predavačima matematičke analize i drugima koji hoće da u što kraćem roku savladaju osnove ove fundamentalne discipline, jedne od najvažnijih i najtežih u matematici. Knjiga pokriva gradivo predvidjeno za rad u prvom semestru studija (zaključno sa temom neprekidnost). Pretpostavljeno je poznavanje elemenata teorije skupova, logike i algebre (koji su izloženi na primer u [10]), ali ne i poznavanje kalkulusa.

Za razliku od klasičnog pristupa analizi, kakav se na primer može naći u Fihtengolcu [12], koga odlikuje ekstenzivnost i za čije proučavanje je ranije korišćeno bar šest semestara, ovde je akcenat istovremeno na kratkoći i na dubini materijala. Sva tvrdjenja su detaljno dokazana. Nastavniku preporučujemo da sam kreira kurs birajući šta će dokazivati na času, a šta će prepustiti studentima za domaći.

Iako se elementi matematičke analize izučavaju već u srednjoj školi , zbog visokog nivoa apstrakcije , ostao je „jaz" prema višim kursevima analize, topologiji i funkcionalnoj analizi, koji je studentima oduvek pravio posebne probleme. Ove discipline, karakteristične za obrazovanje profesionalnih matematičara, ostali „korisnici" obično i ne izučavaju, čime ostaju uskraćeni za najdublje delove matematike i njenih primena u svim oblastima. Način izlaganja u ovom udžbeniku je takav da smanjuje ovaj jaz . Ovako izložen materijal upravo takvim korisnicima omogućava da shvate da matematiku ne čini samo račun sa brojevima, te da im podigne tačku gledanja na svet.

Sličan pristup primenjen je u nekim poznatim udžbenicima (Rosenlicht [18], Rudin [19], Dieudonne [8], Baširov [5], Zorič[26], ...). Ovde je tekst u nekim delovima još stroži. Na primer, složenije elementarne funkcije (eksponencijalne,trigonometrijske, logaritamske) uvedene su tek posle razvijanje neophodne teorije (bez nekorektnog oslanjanja na geometriju), dok su elementi realne analize (kalkulus) utkani u gradivo. Kad god je bilo moguće o „istom trošku" je dokazivano jače tvrdjenje. Neki dokazi, postavke i rešenja zadataka su originalni. Primenjen je za matematiku neuobičajen novinarski stil, neposredan i direktan, sa minimizovanom „praznom pričom" o tome šta će se i zašto izlagati.

Knjiga sadrži i zbirku uradjenih zadataka. Mnogi od njih su originalni , sastavljeni da po stilu i sadržaju odgovaraju gradivu, a neki su povišenog nivoa (izmedju nivoa zadataka u [7] i [17]). Zadaci koji se nalaze neposredno iza glava ilustruju gradivo te glave. Zadaci na kraju knjige povezuju celo gradivo.

Zahvalni smo recenzentima Prof dr Stevanu Pilipoviću, red. članu SANU, Prof dr Milošu Arsenoviću, Prof dr Stojanu Radenoviću i Prof dr Bošku Damjanoviću na korisnim sugestijama i korekturi, što je doprinelo kvalitetu rukopisa.

U iskrenoj nadi da će čitalac posle proučavanja izaći jači i sposobniji da se nosi sa problemima matematičke analize i njenih primena

U Beogradu i Novom Pazaru, 2016-8 Autori

1 REALNI BROJEVI

Pretpostavljamo da je čitalac od ranije upoznat sa elementima logike, teorije skupova , kao i sa osnovnim algebarskim svojstvima skupova realnih i kompleksnih brojeva (kao što je na primer izloženo u [10]).

1.1 Struktura realnih brojeva

Realni brojevi su kamen temeljac matematičke analize. Oni čine algebarsku strukturu (skup sa operacijama i uredjenjem koji zadovoljavaju neke zakone). Kratko ponavljamo osnovna svojstva (zakone) strukture realnih brojeva sa posebnim osvrtom na aksiomu neprekidnosti.

Struktura realnih brojeva je algebarska struktura $(R,+,\cdot,0,1,\leq)$ koju čine skup R koji ima bar dva različita elementa (najčešće označena sa 0 i 1), binarne operacije sabiranje (+) i množenje($\cdot$) i uredjenje ($\leq$), a koja zadovoljava sledeće četiri grupe aksioma:

I. Aksiome sabiranja

Za svaka dva elementa a i b iz R postoji jedinstveni element u R koga nazivamo **zbir** elemenata a i b i označavamo sa $a+b$, pri čemu važe sledeće aksiome:

I_1 **zakon komutacije**: $a+b=b+a, a,b\in R$

I_2 **zakon asocijacije**: $(a+b)+c=a+(b+a), a,b,c\in R$, $a,b,c\in R$

I_3 U R postoji **neutralan element** označen sa 0, takav je $a+0=0+a=a$, $a\in R$

I_4 Svaki $a\in R$ ima **suprotan element** označen sa $-a$, takav da je $a+(-a)=(-a)+a=0$.

II. Aksiome množenja

Za svaka dva elementa a i b iz R postoji jedinstveni element u R koga nazivamo **proizvod** elemenata a i b i označavamo sa $a\cdot b$ (ili skraćeno ab), pri čemu važe sledeće aksiome:

II_1 **zakon komutacije** : $ab = ba$ $a,b\in R$.

II_2 **zakon asocijacije**:$(ab)c = a(bc)$, $a,b,c\in R$ i

II_3 U R postoji **jedinični element** označen sa 1, takav da je $a\cdot 1=1\cdot a=a, a\in R$.

II_4 Za svako $a \in R\backslash\{0\}$ postoji **recipročni element** u R označen sa $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ takav da je

$a^{-1}\cdot a = 1 = a\cdot a^{-1}$.

II_5 **zakon distribucije:** Za $a,b,c\in R$,

$a(b + c) = ab + ac$

Koristeći zakon komutacije lako je izvesti da važi i $(a + b)\, c = ac + bc$.

Prve dve grupe aksioma pokazuju da je struktura (R, +, $\cdot$) **polje**.

III. Aksiome poretka

I. Na skupu R definisana je relacija poretka $\leq$ takva da za svaka dva elementa $a,b \in R$ važi $a \leq b$ (a nije veće od b) ili $b \leq a$
Skup R je stoga **lanac**.

Za relaciju $\leq$ važe aksiome:

III_1 **refleksivnost**: $a \leq a,\ a \in R$.

III_2 **antisimetričnost:** iz $a \leq b$ i $b \leq a$ sledi $a = b$.

III_3 **tranzitivnost:** iz $a \leq b$ i $b \leq c$ sledi $a \leq c$.

III_4 Za $c \in R$ iz $a \leq b$ sledi $a + c \leq b + c$

III_5 Iz $0 \leq a$ i $0 \leq b$ sledi $0 \leq ab$.

Dakle, struktura $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ je **potpuno uređeno polje.**

Umesto $a \leq b$ pišemo i $b \geq a$ („b nije manje od a”).

Zapis $a < b$ znači $a \leq b$ i $a \neq b$ („a je manje od b”).

$b > a$ znači „ b je veće od a” .

Neprazan skup X realnih brojeva je **ograničen odozgo (odozdo)** ako i samo ako (skraćeno akko) postoji realan broj M (m) koga nazivamo **gornja (donja) granica za** X takav da je $x \leq M \quad (x \geq m)$ za sve $x \in X$.
Najmanja gornja granica nekog skupa realnih brojeva X, u oznaci sup X, naziva se **supremum** skupa X . To je gornja granica od X koja ima svojstvo da ni jedno $y \in R$ koje je manje od sup X nije gornja granica od X, odnosno, za svako $y < \sup X$ postoji $x \in X$ veće od y .

IV. Aksioma neprekidnosti

Svaki neprazan odozgo ograničen podskup od R ima supremum.

Zbog važenja aksioma I,II,III,IV struktura $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ se kratko naziva **kompletno uređeno polje** (ili **neprekidno potpuno uređeno polje**).
Kasnije ćemo dokazati da je ovakva struktura jedinstvena do na izomorfizam. Zato vredi,
Definicija 1.1.1 Bilo koje neprekidno potpuno uređeno polje $(R,+,\cdot,0,1,\leq)$ nazivamo **struktura realnih brojeva**.

Operacije **oduzimanje** i **deljenje** uvode se sa :

$$x - y = x + (-y)$$

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1},\ \text{for}\ y \neq 0\ ,$$

a **stepenovanje** prirodnim brojem n sa

$$x^n = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n-puta}.$$

Posebno je važno primetiti da **deljenje nulom nije definisano.**
Često koristimo sledeće posledice aksioma:

Teorema 1.1.2 Za proizvoljne $x, y \in R$ važi:

1. $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$;
2. $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$;
3. $(-x)y = -(xy)$
4. $(-x)(-y) = xy$
5. $x \le 0 \Leftrightarrow -x \ge 0$
6. $x \cdot x \ge 0$
7. 1>0.
8. $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$
9. $xy \ge 0 \Leftrightarrow (x \ge 0 \wedge y \ge 0) \vee (x \le 0 \wedge y \le 0)$
10. $s = \sup A, A \subset R$ ako i samo ako važi : **1.** $a \le s, \forall a \in A$ i **2.** $(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)\ a > s - \varepsilon$.
11. Svaki neprazan ograničen odozdo podskup realnih brojeva ima **infimum** (najveću donju granicu).
12. Ako je $x < \varepsilon$ za svako $\varepsilon > 0$, onda je $x \le 0$.
13. Ako su A i B neprazni odozgo ograničeni podskupovi skupa realnih brojeva onda je skup $C = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ ograničen odozgo i $\sup C = \sup A + \sup B$.
14. Neka su A, B ograničeni odozgo podskupovi skupa pozitivnih realnih brojeva. Tada je i $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ ograničen odozgo i $\sup AB = \sup A \cdot \sup B$.
15. Ako su A i B neprazni podskupovi skupa realnih brojeva i $x \le y$ za sve $x \in A, y \in B$, tada je $\sup A \le \inf B$.
16. Neka je A ograničen odozgo podskup skupa realnih nenegativnih brojeva . Tada je $\sup\{a^n \mid a \in A\} = (\sup A)^n, n \in N$,
17. Neka su A i B ograničeni odozdo podskupovi skupa nenegativnih realnih brojeva i $\alpha \ge 0$, $\beta \in R$.

Tada je:

(i) $\inf\{\alpha a + \beta \mid a \in A\} = \alpha \inf A + \beta$;

(ii) $\inf\{ab \mid a \in A, b \in B\} = \inf A \cdot \inf B$.

Dokaz.

1. $x \cdot 0 = x(0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow -x \cdot 0 + x \cdot 0 = -x \cdot 0 + x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow 0 = x \cdot 0$
2. Neka je xy = 0 i $x \ne 0$. Tada postoji x^{-1} i $0 = x^{-1} \cdot 0 = x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1 \cdot y = y$.
3. x + (-1)·x = (1 + (-1)·x =0·x = x·0 = 0.
$$-x + x + (-1)x = -x + 0$$
$$0 + (-1)x = -x$$
$$(-1)x = -x$$
4. $(-x)(-y) = -x(-y) = -(-y)x = -(-yx) = yx = xy$.
5. Ako je $x \le 0$, onda je $-x + x \le -x$, tj. $0 \le -x$.
6. Ako je $x \ge 0$, onda je $x \cdot x \ge 0$. Ako je $x \le 0$, onda je $-x \ge 0$, pa je $xx = (-x)(-x) \ge 0$.
7. $1 = 1 \cdot 1 \ge 0$. Kako je $1 \ne 0$, sledi $1 > 0$.
8. Pretpostavimo da važi suprotno $x^{-1} \le 0$. Onda je $-x^{-1} \ge 0$, pa je $(-x^{-1}) \cdot x \ge 0$, tj. $-(x^{-1}x) \ge 0, \quad -1 \ge 0, \quad 1 \le 0$. Kontradikcija!
9. Neka je $xy \ge 0$ and $x > 0$. Onda je $x^{-1} > 0$, pa je $x^{-1} \cdot xy \ge 0$, odakle sledi $y \ge 0$. Dakle, $x \ge 0$ and $y \ge 0$. Ostatak dokaza prepuštamo čitaocu.

10. Neka je $s = \sup A, A \subset R$. Kako je s jedna gornja granica važi $a \le s, a \in A$. Kad tvrđenje 2. ne bi važilo, važilo bi $\exists \varepsilon > 0\ \forall a \in A\ \ s - \varepsilon \ge a$. Ovo bi značilo da je $s - \varepsilon$ gornja granica od A manja od s, suprotno definiciji supremuma. Obrnuto, ako važi 1., onda je s gornja granica za A, a 2. garantuje da je to najmanja gornja granica.

11. Neka je $x_1 \in R$ jedna donja granica (minoranta) skupa X, tj. Za svako $x \in X$ važi $x_1 \le x$. Označimo sa $A \subseteq R$ skup svih minoranti skupa X. Za svako $x \in X$ I svako $x' \in A$ važi $x' \le x$, što znači da je svaki element od X majoranta od A i da je skup A ograničen odozgo. Prema aksiomi neprekidnosti, postoji sup $A = x_0$ u $\mathbb{R}$. Kako je x_0 najmanja gornja granica za A a svi elementi od X su gornje granice od A, očevidno je da, za svako $x \in X$, važi $x_0 \le x$, tj. x_0 je takođe minoranta od X. Otuda, $x_0 \in A$. Kako za svako $x \in A$ važi $x \le x_0$, znači da je x_0 najveći element od A, dakle to je najveća donja granica odnosno infimum od X.

12. Ako bi bilo $x > 0$, onda za $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$ imamo kontradikciju $x < \dfrac{x}{2}$!

13. Neka je $a = \sup A, b = \sup B, x \in A, y \in B$. Onda je $x + y \le a + b$, pa je $a + b$ gornja granica za C. Zato postoji $c = \sup C$ i $c \le a + b$. Dokažimo da je $a + b \le c$. Za izabrano $\varepsilon > 0$, postoje $x \in A, y \in B$ za koje je $a - \varepsilon < x, b - \varepsilon < y$. Sabiranjem dobijamo $a + b - 2\varepsilon \le x + y \le c$. Kako ovo vredi za svako $\varepsilon > 0$, prema 10. je $a + b \le c$ Q.E.D.

14. Neka je $a = \sup A, b = \sup B, x \in A, y \in B$. Onda je $xy \le ab$, pa je ab gornja granica za AB. Zato postoji $c = \sup AB$ i $c \le ab$. Dokažimo da je $ab \le c$. Za izabrano $\varepsilon > 0$, postoje $x \in A, y \in B$ za koje je $a - \varepsilon < x, b - \varepsilon < y$. Odavde sledi $ab < (x + \varepsilon)(y + \varepsilon) \le c + \varepsilon(x + y + \varepsilon)$. Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno , odavde sledi $ab \le c$ Q.E.D.

15. Iz $x \le y, x \in A, y \in B$ sledi $\sup A \le y, y \in B$, a odavde $\sup A \le \inf B$ Q.E.D.

16. Dokaz je sličan dokazu u 14.

17.

(i) Prepuštamo čitaocu.

(ii) Iz $a \ge \inf A \ge 0$ i $b \ge \inf B \ge 0$, sledi $ab \ge \inf A \cdot \inf B$. Neka je $\varepsilon > 0$,

$\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{1 + \inf A + \inf B}\}$. Tada postoje $a \in A, b \in B$ tako da je $a < \inf A + \delta, b < \inf B + \delta$ i

$$\begin{aligned} ab &< (\inf A + \delta)(\inf B + \delta) = \inf A \inf B + \delta(\inf A + \inf B + \delta) \\ &\le \inf A \inf B + \frac{\varepsilon}{\inf A + \inf B + 1}(\inf A + \inf B + 1) \\ &< \inf A \inf B + \varepsilon \end{aligned}$$

što dokazuje (ii).

1.2 Skupovi *N* prirodnih brojeva i *Z* celih brojeva

Definicija 1.2.1 Brojeve 1,1+1,(1+1)+1, ((1+1)+1)+1,… nazivamo **prirodni brojevi** a njihov skup označavamo sa N.
Skup $Z = Z^- \cup Z^+ \cup \{0\}$, gde je $Z^- = \{-m | m \in N\}, Z^+ = N$ nazivamo skup **celih brojeva**.

Upotrebom skraćenica

$$1 + 1 = 2,\ 2 + 1 = 3,\ 3 + 1 = 4, ...$$