METODE OPTIMIZACIJE

PRIMENA U ELEKTROENERGETICI

Aleksandar Savić
Darko Šošić
Goran Dobrić
Mileta Žarković

Akademska misao
Beograd, 2018.

Aleksandar Savić, Darko Šošić,
Goran Dobrić, Mileta Žarković

METODE OPTIMIZACIJE
PRIMENA U ELEKTROENERGETICI

Recenzenti
Prof. dr Nikola Rajaković
Prof. dr Tomislav Šekara

Izdavač
AKADEMSKA MISAO
Beograd

Dizajn korice
Zorica Marković, akademski slikar

Štampa
Akademska misao, Beograd

Tiraž
300 primeraka

ISBN 978-86-7466-753-8

PREDGOVOR

Nauka i tehnologija su danas na veoma visokom nivou. Razvijeni su mnogi sistemi sa ciljem da se podigne kvalitet života u raznim sferama. Pored toga što takvi sistemi svoju funkciju moraju da vrše na pouzdan i siguran način potrebno je i da njihov rad bude što efikasniji i ekonomičniji. To je posebno izraženo kod velikih sistema koji pored velikih investicija po pravilu imaju i velike troškove. Male procentualne uštede u ovakvim sistemima kao rezultat mogu dati veoma velike uštede u apsolutnoj novčanoj vrednosti. Odrediti ekonomičan rad nekog sistema gotovo je nemoguće samo na osnovu iskustva i praktičnog znanja, već je neophodno za tu svrhu upotrebiti neki matematički alat. Proces određivanja optimalnog radnog stanja nekog sistema naziva se optimizacija. U matematičkom smislu, optimizacija predstavlja primenu neke optimizacione metode za rešavanje postavljenog optimizacionog problema.

Ova knjiga je namenjena studentima tehničkih fakulteta koji imaju potrebu za bilo kakvim oblikom optimizacije u svojoj oblasti. Akcenat u ovoj knjizi je stavljen na primere iz oblasti elektroenergetskih sistema, ali to ne ograničava primenu ove knjige i u drugim oblastima tehničkih nauka. Namera autora je bila da se napiše knjiga koja studentima može da posluži kao pomoćni udžbenik pri rešavanju većeg broja optimizacionih problema. Pored toga ova knjiga može da pomogne budućim inženjerima u rešavanju raznih optimizacionih problema sa kojima će se susresti u praksi. Pri pisanju ove knjige autori su se vodili idejom da napišu praktični udžbenik koji će čitaocima dati potrebna znanja za samostalnu primenu neke od optimizacionih metoda. Iz tog razloga autori se nisu upuštali u šira teorijska razmatranja, dokaze teorema i sl.

U literaturi se može sresti veoma veliki broj optimizacionih metoda. Autori su imali nimalo lak zadatak da izaberu manji broj reprezentativnih metoda koje su u knjizi detaljno obrađene. Po mišljenju autora izabrane su one metode koje u praksi imaju široku primenu i koje su se dokazale u rešavanju mnogih optimizacionih problema. Autori očekuju da čitaoci budu najbolji kritičari ovog izbora i da predlože metode koje će dobiti mesto u nekom od narednih izdanja ove knjige.

Još jednom je potrebno naglasiti da iako naslov ove knjige upućuje na oblast elektroenergetike, znanja iz ove knjige mogu poslužiti studentima, inženjerima i istraživačima iz mnogih drugih oblasti nauke i tehnologije.

Na kraju autori se posebno zahvaljuju recenzentima prof. dr Nikoli Rajakoviću i prof. dr Tomislavu Šekari koji su pažljivo pročitali rukopis knjige i dali korisne sugestije i samim tim doprineli da ova knjiga bude još bolja.

Autori

SADRŽAJ

1

UVOD U OPTIMIZACIJU

1.1 Uvod

Optimizacija je proces dobijanja najboljeg rezultata pod datim okolnostima. Kod projektovanja, izgradnje i održavanja bilo kog sistema, inženjeri moraju, u različitim fazama, da donesu mnoge tehničke i menadžerske odluke i rešenja. Krajnji cilj svih ovih odluka je ili da se minimizuje potrebno angažovanje ili da se maksimizuje željena dobit. U svim praktičnim situacijama potrebno angažovanje i željena dobit mogu se izraziti kao funkcija određenih upravljačkih promenljivih pa se optimizacija može definisati kao proces pronalaženja takvih uslova koji daju minimalnu ili maksimalnu vrednost funkcije.

Ne postoji jedinstven optimizacioni metod za rešavanje svih optimizacionih problema. Samim tim, razvijen je veliki broj optimizacionih metoda za rešavanje različitih tipova optimizacionih problema. Postupak nalaženja optimuma naziva se i matematičko programiranje i ono se generalno izučava kao deo operacionih istraživanja. Operaciono istraživanje je grana matematike koja se bavi primenom naučnih metoda i tehnika u procesu donošenja odluka i pronalaženju optimalnog rešenja.

U Tab. 1.1. dat je pregled nekih od optimizacionih tehnika koji se koriste za rešavanje različitih optimizacionih problema [1]. U datoj tabeli metode su podeljene na klasične (tradicionalne) i moderne optimizacione metode. To je samo jedna od mogućih podela optimizacionih metoda.

Istorijski gledano, za početke optimizacije zaslužni su matematičari Njutn (*Newton*), Lagranž (*Lagrange*) i Koši (*Cauchy*). Doprinos Njutna i Lajbnica (*Leibnitz*) razvoju difrencijalne matematike omogućio je i razvoj različitih optimizacionih metoda. Prvi proračuni različitih varijanti sa ciljem minimizacije neke funkcije izvedeni su od strane Bernulija (*Bernoulli*), Ojlera (*Euler*) i Lagranža. Metod za optimizaciju uz prisustvo ograničenja, uvođenjem nepoznatih multiplikatora, prvi je osmislio Lagranž pa on po njemu i nosi naziv. Uprkos ovim doprinosima, nije bilo značajnih pomaka na polju optimizacije sve do sredine dvadesetog veka. Početak razvoja računara omogućio je primenu mnogih optimizacionih procedura, a ujedno je pokrenuo istraživanja novih optimizacionih metoda. Od važnih doprinosa tog doba potrebno je pomenuti simpleks metodu koju je osmislio Danzig (*Dantzig*) 1947.

godine za potrebe rešavanja problema linearnog programiranja [2]. Belman (*Bellman*) je 1957. postavio principe optimalnosti za probleme dinamičkog programiranja [3]. Rad Kuna (*Kuhn*) i Takera (*Tucker*) 1951. godine na potrebnim i dovoljnim uslovima za optimalno rešenje optimizacionog problema postavio je temelje velikom broju budućih teorijskih istraživanja i analiza [4].

Tab. 1.1 Pregled optimizacionih metoda

Klasične metode	**Moderne metode**
Linearno programiranje	Genetički algoritmi
Nelinearno programiranje	Simulirano kaljenje
Geometrijsko programiranje	Kolonija mrava
Kvadratno programiranje	Roj čestica
Dinamičko programiranje	Diferencijalna evolucija
Celobrojno programiranje	Neuralne mreže
Ciljno programiranje	Fuzzy optimizacija
Multikriterijumsko programiranje	
Metoda unutrašnje tačke	
Teorija igre	

Poslednjih decenija, zahvaljujući pre svega sve bržim računarima, razvijena je posebna grupa optimizacionih metoda. Ove metode možemo nazvati zajedničkih imenom moderne metode, mada se često u literaturi zovu i netradicionalne metode. Lista nekih od metoda data je u Tab. 1.1. Ove metode su danas veoma popularne i pokazale su se kao veoma uspešne u rešavanju kompleksnih inženjerskih optimizacionih problema. Najznačajniji predstavnik ovih metoda je svakako genetički algoritam. Genetički algoritam je optimizaciona metoda bazirana na mehanizmu genetike i selekcije u prirodi. Genetički algoritam ima veliki broj različitih varijanti i modifikacija ali je orginalno razvijen od strane Holanda (*Holland*) 1975. godine [5]. Simulirano kaljenje je metod zasnovan na mehanizmu hlađenja zagrejanog metala kroz proces kaljenja. Metod su orginalno razvili Kirkpatrik (*Kirkpatrick*), Gelat (*Gelatt*) i Veki (*Vecchi*) [6]. Optimizacija rojem čestica (*Particle Swarm optimization*) oponaša ponašanje grupe jedinki u prirodi kao što su roj pčela ili jato ptica. Algoritam su osmislili Kenedi (*Kennedy*) i Eberhart (*Eberhart*) 1995. godine [7]. Optimizacija kolonijom mrava (*Ant Colony optimization*) je bazirana na konceptu saradnje između mrava u okviru kolonije što omogućava da se nađe najkraći put od mravinjaka do izvora hrane. Metodu je prvi predložio Dorigo (*Dorigo*) 1992. godine [8]. Neuralne mreže koriste princip nervnog sistema koji je sposoban da paralelnim procesuiranjem obradi veliki broj informacija. Ovaj metod prvi su za optimizaciju primenili Hopfild (*Hopfield*) i Tank (*Tank*) 1985. godine [9]. Metode Fuzzy optimizacije su razvijene za rešavanje problema koji podrazumevaju modelovanje podataka, kriterijumskih funkcija i ograničenja koja nisu precizno definisana. Fuzzy pristup kod jednokriterijumske i višekriterijumske optimizacije prvi je predstavio Rao (*Rao*)1986. godine [10].

U poglavljima koja slede najznačajniji predstavnici klasičnih i modernih optimizacionih metoda biće detaljno obrađeni.

1.2 Modelovanje optimizacionog problema

Optimizacioni problem modelovan jednom kriterijumskom funkcijom može se u opštem slučaju opisati sledećom matematičkom formulacijom:

$$\begin{aligned} &\min/\max f(\mathbf{x}), \\ \text{p.o.:}\quad & g_j(\mathbf{x}) \le 0, \qquad j = 1,2,\ldots,J; \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,K; \\ & x_i^G \ge x_i \ge x_i^D, \quad i = 1,2,\ldots,N. \end{aligned} \tag{1.1}$$

gde je:

$f(\mathbf{x})$ – kriterijumska funkcija,

$\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \cdots x_N]^T$ – vektor upravljačkih promenljivih,

$g_j(\mathbf{x})$ – ograničenja tipa nejednakosti,

$h_k(\mathbf{x})$ – ograničenja tipa jednakosti,

x_i^D – donja granica za promenljivu x_i,

x_i^G – gornja granica za promenljivu x_i.

U prethodnoj jednačini p. o. predstavlja skraćenicu od termina „pod ograničenjima“ i kao takva koristiće se u daljem tekstu u knjizi. U prethodnoj jednačini skalarne veličine su napisane kosim, a vektorske veličine podebljanim slovima. Ova konvencija za označavanje veličina koristiće se i u nastavku knjige.

1.3 Vektor upravljačkih promenljivih

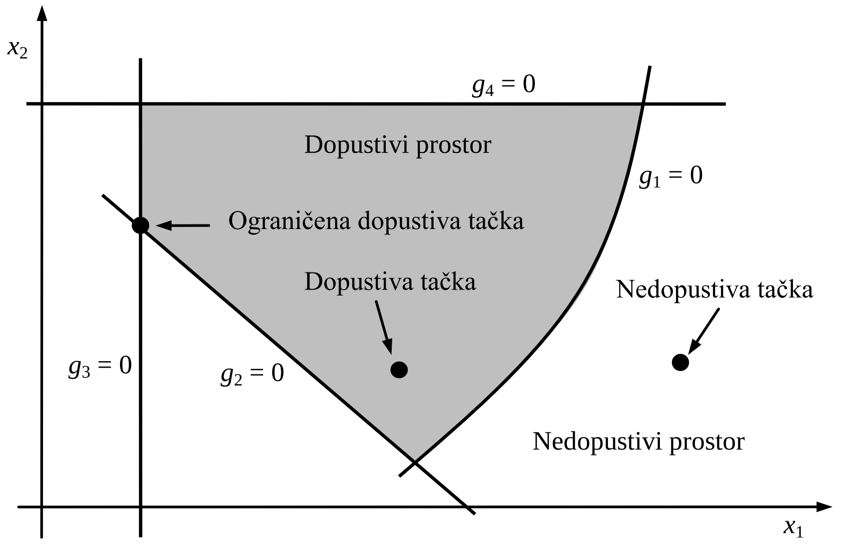
Svaki inženjerski sistem ili komponenta definisana je skupom određenih veličina. Generalno gledano određeni broj tih veličina ima konstatne vrednosti pa se ove veličine mogu nazvati unapred definisani parametri ili samo parametri. Sve ostale veličine u procesu dizajniranja mogu se tretirati kao promenljive. Ove promenljive se nazivaju *upravljačke ili kontrolne promenljive* x_i, $i = 1, 2, ..., N$. Skup upravljačkih promenljivih čini vektor upravljačkih promenljivih $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \cdots x_N]^T$.

Vektor upravljačkih promenljivih **x** formira N–dimenzionalni prostor koji je podskup Euklidovog (*Euclid*) prostora R^N. Ovaj prostor se naziva *prostor upravljačkih promenljivih* ili samo *upravljački prostor*. Vektor upravljačkih promenljivih **x** može biti vektor kontinualnih ili diskretnih promenljivih kao što i kriterijumska funkcija može biti kontinualna ili diskretna. Svaka tačka u upravljačkom prostoru može da bude dopustivo ili nedopustivo rešenje optimizacionog problema. Da li je neka tačka dopustiva ili ne zavisi od toga da li ta tačka zadovoljava postavljena ograničenja.

1.4 Ograničenja

Kod modelovanja jednog optimizacionog problema od presudne važnosti je modelovanje ograničenja. Kod konkretnih inženjerskih problema postavljena ograničenja omogućavaju da dobijena rešenja u procesu optimizacije imaju fizički smisao. Neadekvatno modelovanje ograničenja može dovesti do toga da dobijeni rezultat nema fizički smisao pa je samim tim neupotrebljiv.

Radi ilustracije može se posmatrati optimizacioni problem koji ima samo ograničenja tipa nejednakosti $g_j(\mathbf{x}) \le 0$, $j = 1, ..., J$. Skup vrednosti upravljačkog vektora **x** koji zadovoljava jednačinu $g_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, ..., J$ formira hiper površ u prostoru upravljačkih promenljivih koja se naziva *površ ograničenja*. Može se reći da je to $(N–1)$ dimenzionalni potprostor gde je N broj upravljačkih promenljivih. Površ ograničenja deli prostor upravljačkih promenljivih na dva dela: prvi u kome je $g_j(\mathbf{x}) \le 0$, $j = 1, ..., J$ i drugi u kome je $g_j(\mathbf{x}) > 0$, $j = 1, ..., J$. Prema tome tačke koje leže u oblasti gde je $g_j(\mathbf{x}) > 0$, $j = 1, ..., J$ su nedopustive ili neprihvatljive, dok tačke koje leže u oblasti $g_j(\mathbf{x}) \le 0$, $j = 1, ..., J$ su dopustive ili prihvatljive. Deo prostora za koji važi $g_j(\mathbf{x}) \le 0$, $j = 1, ..., J$ naziva se *dopustivi prostor* upravljačkih promenljivih. Od posebnog značaja su tačke koje leže na površi ograničenja. Te tačke se nazivaju *ograničene tačke*. Vrlo često je upravo neka od ovih tačaka rešenje optimizacionog problema. Za ovakve tačke neko od postavljenih ograničenja $g_j(\mathbf{x})$ jednako je nuli. Takvo ograničenje naziva se *aktivno ograničenje*. Na Sl. 1.1. prikazan je hipotetički dvodimenzionalni upravljački prostor sa krivama ograničenja. Nacrtane su četiri krive ograničenja. Ove krive ograničavaju dopustivi prostor. Dopustivi prostor na Sl. 1.1 je posebno osenčen. Preostali deo prostora upravljačkih promenljivih je nedopustiv. Na slici su naznačene i neke karakteristične tačke.



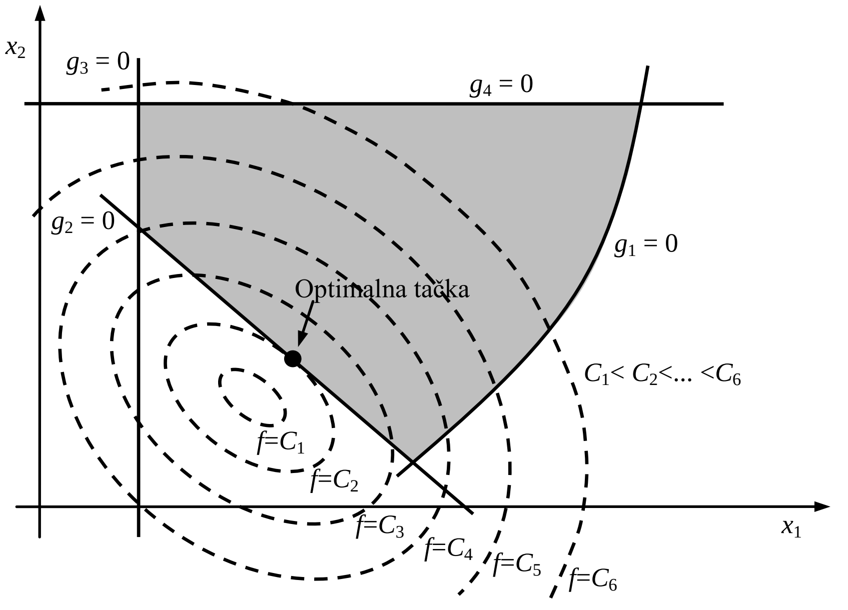
Sl. 1.1 Upravljački prostor sa krivama ograničenja

1.5 Kriterijumska funkcija

Kod projektovanja nekog sistema glavni cilj je nalaženje prihvatljivog ili adekvatnog rešenja koje zadovoljava postavljene zahteve. Generalno gledano, može da postoji više prihvatljivih rešenja pa je svrha optimizacije izbor najboljeg od njih. Prema tome potrebno je izabrati kriterijum prema kome će se porediti različita prihvatljiva rešenja i izabrati najbolje. Kriterijum prema kome će se vrši optimizacija, a koji je izražen u funkciji upravljačkih promenljivih naziva se *kriterijumska ili objektivna funkcija*. Izbor kriterijumske funkcije zasvisi od prirode problema i oblasti u kojoj se primenjuje. Na primer u energetskim sistemima to može da bude minimizacija različitih troškova, maksimizacija profita, mimimizacija gubitaka aktivne snage, minimizacije utrošenog vremena za neku aktivnost itd.

Izbor kriterijumske funkcije svakako predstavlja najvažniju odluku u procesu rešavanja nekog optimizacionog problema. Potrebno je reći da je kod nekih optimizacionih problema potrebno simultano zadovoljiti više kriterijumskih funkcija pa se takva optimizacija naziva *višekriterijumska optimizacija*. O njoj će biti reči u posebnom poglavlju.

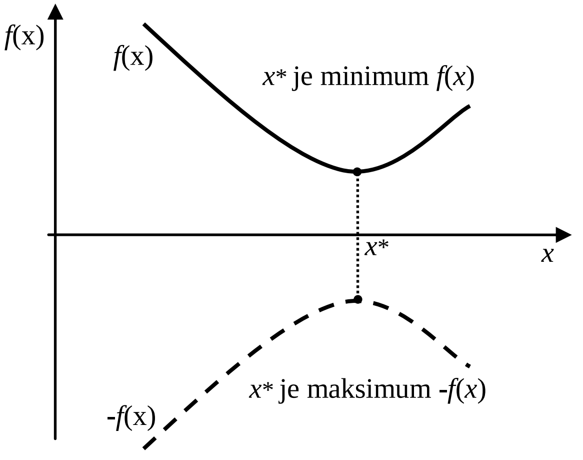
Sve tačke koje zadovoljavaju jednačinu $f(\mathbf{x}) = C$, pri čemu je C kontanta, formiraju hiperpovršinu u upravljačkom prostoru. Različitim vrednostima konstante C odgovaraju različite krive. Prema tome, variranjem vrednosti konstante C dobija se familija površi u upravljačkom prostoru. Ove površi se nazivaju *površi kriterijumske funkcije* i prikazane su u hipotetičkom dvodimenzionalnom upravljačkom prostoru na Sl. 1.2. Kada su površi kriterijumske funkcije nacrtane zajedno sa površima ograničenja, optimalna tačka može se odrediti na jednostavan način, kao što je prikazano je na Sl. 1.2. Međutim kada je broj upravljačkih promenljivih veći od 3, površi ograničenja i kriterijumske funkcije je nemoguće predstaviti grafički pa je optimizacioni problem moguće rešiti jedino matematičkim putem.



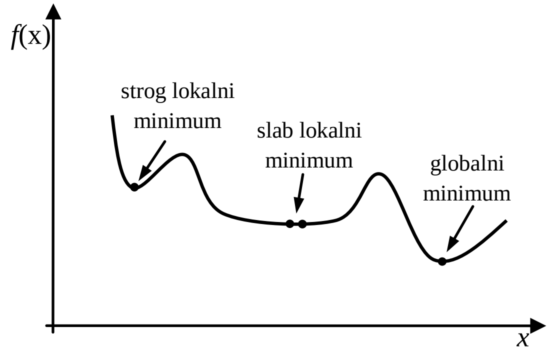
Sl. 1.2 Upravljački prostor sa krivama ograničenja

Generalno gledano, proces optimizacije podrazumeva nalaženje minimalne ili maksimalne vrednosti zadate kriterijumske funkcije. Na Sl. 1.3 može se videti da ako tačka x^* odgovara minimalnoj vrednosti kriterijumske funkcije $f(\mathrm{x})$, ista tačka odgovara maksimalnoj vrednosti negativne kriterijumske funkcije $-f(\mathrm{x})$. Prema tome optimizacija može da podrazumeva minimizaciju, pri čemu se maksimum kriterijumske funkcije može odrediti nalaženjem minimuma negativne vrednosti iste kriterijumske funkcije. Imajući ovo u vidu, sve definicije, analize i pretpostavke mogu da se daju samo za slučaj minimizacije kriterijumske funkcije, a da to važi i za slučaj maksimizacije kriterijumske funkcije.

Cilj minimizacije je nalaženje globalnog minimuma kriterijumske funkcije. Pored globalnog minimuma postoji i lokalni minimum. Lokalni minimum može biti strog ili slab. Na Sl. 1.4 data je ilustracija lokalnog i globalnog minimuma za neku kriterijumsku funkciju. Globalni minimum je ujedno i lokalni minumum. Međutim, lokalni minimum po pravilu ne mora da bude i globalni minimum.



Sl. 1.3 Određivanje maksimuma kriterijumske funkcije



Sl. 1.4 Ilustracija lokalnog i globalnog minimuma funkcije *f*(*x*)

Globalni minimum u opštem slučaju može se definisati na sledeći način [11]:

Definicija: Za datu funkciju $f:\Omega \subseteq R^N \to R$, pri čemu je $\Omega \neq 0$ i $\mathbf{x} \in \Omega$, vrednost $f^* = f(\mathbf{x}^*) > -\infty$ se naziva globalni minimum ako i samo ako važi $\forall \mathbf{x} \in \Omega: f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$. Vektor **x***, predstavlja rešenje optimizacionog problema.

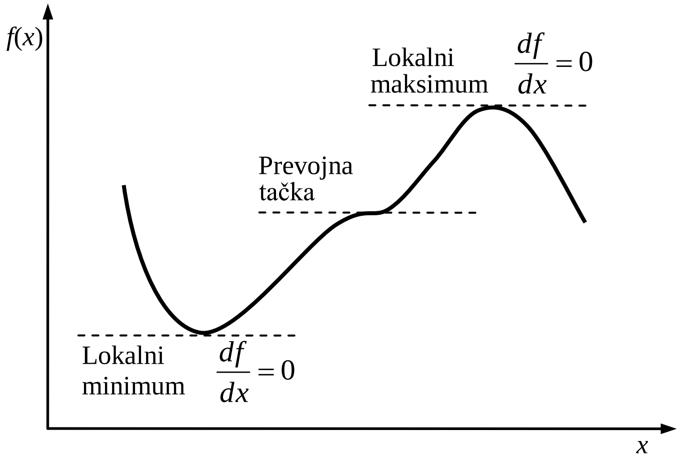
1.6 Uslovi optimalnosti bez prisustva ograničenja

Za razumevanje procesa optimizacije veoma je važno analizirati uslove optimalnosti. Uslovi optimalnosti u suštini su važni iz dva razloga. Prvo, oni su neophodni da se prepozna rešenje optimizacionog problema. Pored toga oni mogu da daju ideje i smernice za razvoj optimizacionih metoda. Za početak se može analizirati kriterijumska funkcija od jedne promenljive, *f*(*x*). Neka je data funkcija neprekidna i neka je njen prvi izvod takođe neprekidna funkcija na celom razmatranom intervalu.

Potreban uslov za egzistenciju minimuma ili maksimuma kriterijumske funkcije je da nagib funkcije, odnosno prvi izvod kriterijumske funkcije f po promenljivoj x bude jednak 0:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \tag{1.2}$$

Potreban uslov egzistencije ekstremne vrednosti diferencijabilne funkcije $f(x)$ ilustrovan je na Sl. 1.5.



Sl. 1.5. Geometrijski prikaz potrebnih uslova optimalnosti

Tačka u kojoj je zadovoljen potreban uslov naziva se stacionarna tačka. *Dovoljan uslov* se dobija na osnovu vrednosti drugog izvoda u okolini te tačke. Na primer, dovoljan uslov za maksimum je da drugi izvod u toj tački bude negativan. To praktično znači da svaka promena promenljive x u okolini te tačke dovodi do smanjenja vrednosti funkcije f. Slično, dovoljan uslov za egzisteniciju minimuma je da drugi izvod funkcije bude pozitivan.

Na sličan način mogu se analizirati uslovi optimalnosti za slučaj kriterijumske funkcije f sa vektorskom promenljivom $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}=[x_1, x_2, ..., x_N]$. Pretpostaviće se da je ova funkcija dvostruko diferencijabilna na skupu R^N. Razvoj ove funkcije u Tejlorov (*Taylor*) red dat je sledećom jednačinom:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} + O_3(\Delta\mathbf{x}) \tag{1.3}$$

gde je:

$\mathbf{x}_0$ – tačka u Euklidovom prostoru R^N,

$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ – priraštaj vektorske promenljive $\mathbf{x}$,

$\nabla f(\mathbf{x}_0)$ – vektor kolona dimenzije *N* prvih izvoda funkcije *f* u tački $\mathbf{x}_0$,

$\nabla^2 f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ – simetrična matrica dimenzije *N*×*N* drugih parcijalnih izvoda funkcije *f* određenih u tački $\mathbf{x}_0$. Ova matrica se zove Hesijan (*Hessian*).

$O_3(\Delta\mathbf{x})$ – svi članovi reda većeg od 2.

Ako se zanemare članovi višeg reda može se izraziti promena kriterijumske funkcije od priraštaja promenljive $\Delta\mathbf{x}$:

$$\Delta f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)^T \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} \tag{1.4}$$

Prema definiciji, u ekstremnoj tački funkcija ne treba ni da raste ni da opada. Da bi $\mathbf{x}_0$ bila ekstremna tačka razlika $\Delta f(\mathbf{x})$ treba da bude približno jednaka nuli za male promene $\Delta\mathbf{x}$. To znači da treba da važi da je:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0 \tag{1.5}$$

odnosno, ako se prethodni izraz napiše u razvijenoj formi, treba da važi:

$$\frac{df}{dx_k} = 0, \ \ k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.6}$$

Prema tome potreban uslov da tačka $\mathbf{x}_0$ bude ekstremna tačka dat je jednačinom (1.5).

Dovoljan uslov da tačka $\mathbf{x}_0$ bude tačka maksimuma je da u svim pravcima oko tačke $\mathbf{x}_0$ funkcija opada. Slično, dovoljan uslov da tačka $\mathbf{x}_0$ bude tačka minimuma je da u svim pravcima oko tačke $\mathbf{x}_0$ funkcija raste. Pošto je $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$, jednačina (1.4) postaje:

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}. \tag{1.7}$$

Očigledno je da znak $\Delta f(\mathbf{x})$ zavisi od prirode kvadratne forme

$$Q(\mathbf{x}) = \Delta\mathbf{x}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}. \tag{1.8}$$

Iz linearne algebre je poznato da je:

H pozitivno definitna matrica ako	za sve $\Delta\mathbf{x}$, $Q(\mathbf{x}) > 0$
H pozitivno semidefinitna matrica ako	za sve $\Delta\mathbf{x}$, $Q(\mathbf{x}) \geq 0$
H negativno definitna matrica ako	za sve $\Delta\mathbf{x}$, $Q(\mathbf{x}) < 0$
H negativno semidefinitna matrica ako	za sve $\Delta\mathbf{x}$, $Q(\mathbf{x}) \leq 0$
H nedefinitna matrica ako	za neke $\Delta\mathbf{x}$, $Q(\mathbf{x}) > 0$
	a za druge $\Delta\mathbf{x}$, $Q(\mathbf{x}) < 0$

Prema tome, tačka $\mathbf{x}_0$ je:

– minimum ako je $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ pozitivno definitna matrica,

– maksimum ako je $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ negativno definitna matrica,

– prevojna tačka ako je $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ nedefinitna matrica.

Ovo su praktično dovoljni uslovi za egistenciju minimuma, odnosno maksimuma funkcije *f*. Navedeni uslovi odnose se na lokalne optimume. Da bi važili i za globalne optimume potrebno je da kriterijumska funkcija bude konveksna kada se radi o minimumu ili konkavna kada se radi o maksimumu. Pod tim okolnostima postoji samo jedna ekstremna tačka koja zadovoljava potrebne i dovoljne uslove.

1.7 Uslovi optimalnosti u prisustvu ograničenja

Analiza će se započeti sa optimizacionim problemom koji uključuje više ograničenja tipa jednakosti:

$$\min f(x_1, x_2, ..., x_N)$$
$$\text{p.o.} h_k(x_1, x_2, ..., x_N) = 0, \ \ k = 1, ..., K.$$

U principu, ovakav problem može da se reši kao optimizacioni problem bez ograničenja eliminacijom *K* nezavisnih promenljivih korišćenjem ograničenja tipa jednakosti. Prisustvo ograničenja jednakosti redukuje dimenzionalnost orginalnog problema sa *N* na $N - K$. Kada je optimizacioni problem redukovan na problem bez ograničenja on se može rešiti nekom adekvatnom optimizacionom metodom. Ovo se može ilustrovati sledećim primerom.

Primer 1.1.

Dat je optimizacioni problem:

$$\min f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3$$
$$\text{p.o.} h_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0.$$

Eliminisanjem promenljive x_3, pomoću ograničenja, dobija se otpimizacion problem bez ograničenja koji uključuje dve promenljive:

$$\min f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2).$$

Ovaj metod eliminacije promenljivih je primenjiv sve dok se ograničenja tipa jednakosti mogu rešiti eksplicitno za dati set nezavisnih promenljivih. U prisustvu više ograničenja tipa jednakosti proces eleiminacije može biti komplikovan. Štaviše, u određenim situacijama nije moguće rešiti ograničenja eksplicitno kako bi se eliminisala promenljiva.

1.7.1 Lagranžovi multiplikatori

Metoda Lagranžovih multiplikatora u osnovi daje skup potrebnih uslova za identifikaciju kandidata za optimalne tačke optimizacionog problema sa ograničenjima. Ovo se vrši konvertovanjem problema sa ograničenjima u ekvivalentan problem bez ograničenja uvođenjem odgovarajućih parametara koji se zovu Lagranžovi multiplikatori.

Može se najpre analizirati minimizacija funkcije sa N promenljivih uz jedno ograničenje tipa jednakosti:

$$\min \ f(x_1, x_2, ..., x_N). \tag{1.9}$$

$$\text{p.o. } h_1(x_1, x_2, ..., x_N) = 0. \tag{1.10}$$

Metoda Lagranžovih multiplikatora konvertuje dati optimizacioni problem u sledeći optimizacioni problem bez ograničenja:

$$\min \ L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda h_1(\mathbf{x}). \tag{1.11}$$

gde je $L(\mathbf{x}, \lambda)$ Lagranžova funkcija, a λ je Lagranžov multiplikator. Potrebno je reći da nema restrikcije po pitanju znaka za veličinu λ.

Neka je pretpostavka da za fiksnu vrednost $\lambda = \lambda^0$, funkcija $L(\mathbf{x}, \lambda)$ ima minimum u tački $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, pri čemu $\mathbf{x}^0$ zadovoljava $h_1(\mathbf{x}^0) = 0$. Prema tome, jasno je da $\mathbf{x}^0$ minimizuje funkciju (1.9) pod ograničenjem (1.10) jer je za svaku vrednost $\mathbf{x}$ koja zadovoljava jednačinu (1.10), $h_1(\mathbf{x}) = 0$ i $\min L(\mathbf{x}, \lambda) = \min f(\mathbf{x})$.

Potrebno je odrediti odgovarajuću vrednost λ, takvu da zadovoljava navedene uslove. To se može uraditi tretiranjem λ kao ravnopravne promenljive u procesu nalaženja minimuma Lagranžove funkcije date jednačinom (1.11). Ovo će biti ilustrovano kroz sledeći primer.

Primer 1.2

Rešiti optimizacioni problem:

$$\min \ f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{p.o.} h_1(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

Formiranjem Lagranžove funkcije dobija se optimizacioni problem bez ograničenja:

$$\min \ L(\mathbf{x}, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda(2x_1 + x_2 - 2).$$

Izjednačavanjem parcijalnih izvoda Lagranžove funkcije po promenljivim $\mathbf{x}$ i λ dobijaju se potrebni uslovi egzistencije minimuma:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda = 0\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + x_2 - 2 = 0\,.$$

Očigledno je da se parcijalni izvod Lagranžove funkcije po λ svodi na jednačinu ograničenja. Ovaj sistem jednačina potpuno je određen i njegovim rešavanjem dobijaju se sledeće vrednosti za promenljive:

$$x_1^0 = \frac{4}{5},\ x_2^0 = \frac{2}{5},\ \lambda^0 = \frac{4}{5}\,.$$

Ovo rešenje prestavlja stacionarnu tačku postavljenog optimizacionog problema. Izračunavanjem Hesijana funkcije L u odnosu na promeljivu $\mathbf{x}$ može se utvrditi da li su ispunjeni dovoljni uslovi da ova stacionarna tačka bude minimum. Hesijan funkcije L je:

$$H_L(\mathbf{x},\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dobijena matrica je pozitivno definitna, odnosno $H_L(\mathbf{x},\lambda)$ je konveksna funkcija za sve $\mathbf{x}$. Prema tome dobijena stacionarna tačka odgovara globalnom minimumu.

Lagranžov metod se može generalizovati na slučaj optimizacije sa više ograničenja tipa jednakosti. Neka je dat optimizacioni problem:

$$\min\ f(\mathbf{x}) = 0\,. \tag{1.12}$$

$$\text{p.o. } h_k(\mathbf{x}) = 0,\ k = 1, \ldots, K\,. \tag{1.13}$$

Proširena Langranžova funkcija u ovom slučaju je:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k h_k(\mathbf{x})\,. \tag{1.14}$$

Veličine λ_1, λ_2, ..., λ_K predstavljaju Lagranžove multiplikatore koje je potrebno odrediti zajedno sa promenljivim x_1, x_2, ..., x_N. Izjednačavanjem parcijalnih izvoda funkcije L po $\mathbf{x}$ dobija se sistem od N jednačina sa N nepoznatih:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n} = 0,\ n = 1, \ldots, N\,. \tag{1.15}$$

Ovom sistemu jednačina dodaje se K jednačina ograničenja tipa jednakosti:

$$h_k(\mathbf{x}) = 0,\ k = 1, \ldots, K\,. \tag{1.16}$$

Jednačine (1.15) i (1.16) čine sistem od $N + K$ jednačina sa $N + K$ nepoznatih. Rešavanjem ovog sistema jednačina dobija se stacionarna tačka Lagranžove funkcije L. Izračunavanjem Hesijana funkcije L po promenljivoj $\mathbf{x}$ može se pokazati da li dobijena stacionarna tačka predstavlja globalni optimum.

1.7.2 Kun–Tukerovi uslovi

U prethodnoj sekciji Lagranžovi multiplikatori su upotrebljeni za razvoj uslova optimalnosti za optimizacione probleme sa ograničenjima tipa jednakosti. Kun i Taker su proširili ovu teoriju na opšti nelinearni optimizacioni problem sa ograničenjima tipa jednakosti i nejednakosti. Može se posmatrati sledeći optimizacioni problem:

$$\min f(\mathbf{x}), \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\, & g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \;\; j = 1, 2, ..., J \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0, \;\; k = 1, 2, ..., K \end{aligned}, \tag{1.18}$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \cdots x_N]^T. \tag{1.19}$$

Za ograničenje tipa nejednakosti $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ se kaže da je aktivno u tački $\mathbf{x}_0$ ako je $g_j(\mathbf{x}_0) = 0$. U suprotnom, za ograničenje se kaže da je neaktivno ako je $g_j(\mathbf{x}_0) > 0$. Ako je moguće identifikovati neaktivna ograničenja u optimumu pre rešavanja optimizacionog problema onda se ta ograničenja mogu isključiti iz razmatranja i time redukovati dimenziju problema. Međutim, kod većine realnih problema to je uglavnom nemoguće uraditi.

I u ovom slučaju može se formirati proširena Lagranžova funkcija:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{J} \mu_j g_j(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k h_k(\mathbf{x}). \tag{1.20}$$

U jednačini (1.20), Lagranžovi multiplikatori λ_k odgovaraju ograničenjima tipa jednakosti, a Lagranžovi multiplikatori μ_j odgovaraju ograničenjima tipa nejednakosti. Multiplikatori μ_j se zovu još i Kun–Takerovi multiplikatori.

Kun i Taker su razvili potrebne i dovoljne uslove za opšti nelinearni optimizacioni problem uz pretpostavku da su funkcije f, g_j i h_k diferencijabilne. Ovi uslovi optimalnosti su poznati kao Kun–Takerovi uslovi ili Kun–Takerov problem. Ovi uslovi se uglavnom daju u formi sistema nelinearnih jednačina koje je potrebno rešiti. Drugim rečima Kun–Takerovi uslovi se svode na određivanje vektora $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda}$ koji zadovoljavaju sledeće jednačine:

$$\nabla f(x) - \sum_{j=1}^{J} \mu_j \nabla g_j(x) - \sum_{k=1}^{K} \lambda_j \nabla h_k(x) = 0. \tag{1.21}$$

$$g_j(x) \geq 0, \;\; j = 1, 2, ..., J. \tag{1.22}$$

$$h_k(x) = 0, \ \ k = 1, 2, ..., K \ . \tag{1.23}$$

$$\mu_j g_j(x) = 0, \ \ j = 1, 2, ..., J \ . \tag{1.24}$$

$$\mu_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., J \ . \tag{1.25}$$

Uslovi dati jednačinama (1.21) – (1.23) su jasni na osnovu prethodnih izlaganja. Uslov dat jednačinom (1.24) naziva se uslov komplementarnosti. Ovaj uslov se odnosi na stanje ograničenja. Ako je j–to ograničenje neaktivno odnosno $g_j(\mathbf{x}_0) > 0$, onda je $\mu_j = 0$ i važi da je $\mu_j g_j(\mathbf{x}_0) = 0$. U suprotnom, ako je j–to ograničenje aktivno odnosno $g_j(\mathbf{x}_0) = 0$, onda nije neophodno da multiplikator μ_j bude jednak 0, pošto je već ispunjeno da je $\mu_j g_j(\mathbf{x}_0) = 0$. Dodatni uslov je da multiplikator μ_j bude nenegativan, kao što je dato jedančinom (1.25).

Uvođenjem dodatnih promenljivih, ograničenja tipa nejedankosti mogu se prevesti u ograničenja tipa jednakosti. Optimizacioni problem dat jednačinama (1.17) – (1.19) postaje:

$$\min \ f(\mathbf{x}), \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\, & g_j(\mathbf{x}) - y_j^2 = 0, \ \ j = 1, 2, ..., J \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0, \ \ j = 1, 2, ..., K \end{aligned} \ , \tag{1.27}$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N]^T, \tag{1.28}$$

Ovako postavljeni problem bez ograničenja tipa nejednakosti može da se reši primenom metode Lagranžovih multiplikatora pri čemu promenljive y_j, $j = 1, ..., J$, imaju isti tretman kao i promenljive $\mathbf{x}$. Ovo će biti ilustrovano kroz naredni primer.

Primer 1.3

Rešiti optimizacioni problem:

$$\min \ f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2,$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\, & g_1(\mathbf{x}) = x_1 - 1 \geq 0 \\ & h_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Uvođenjem dodatne promenljive y_1 dati optimizacioni problem postaje:

$$\min \ f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2,$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\, & h_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ & h_2(\mathbf{x}) = x_1 - 1 - y_1^2 = 0. \end{aligned},$$

Sada se može formirati proširena Lagranžova funkcija:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = x_1^2 - x_2 - \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) - \lambda_2(x_1 - 1 - y_1^2) \, .$$

Potrebni uslovi egzistencije minimuma svode se na sledeće jednačine:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 ,$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_2} = -1 - \lambda_1 = 0 ,$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial y_1} = 2\lambda_2 y_1 = 0 ,$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0 ,$$

$$x_1 - 1 - y_1^2 = 0 .$$

Potrebno je reći da uslov $2\lambda_2 y_1 = 0$ odgovara uslovu komplementarnosti kod Kun–Takerovih uslova. Ako je ograničenje tipa jednakosti aktivno to se svodi na to da je promenljiva y_1 jednaka 0. U suprotnom, ako ograničenje nije aktivno onda promenljiva λ_2 treba da bude jednaka 0.

Rešavanjem prethodnog sistema jednačina dobijaju se sledeće vrednosti za nezavisne promenljive i Lagranžove multiplikatore:

$$x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 1,\ y_1^0 = 0,\ \lambda_1^0 = -1,\ \lambda_2^0 = 3 .$$

Pri ovim vrednostima minimalna vrednost kriterijumske funkcije je jednaka 0.

Dati primer je jednostavan i lako se može rešiti primenom jednostavnih matematičkih operacija. Međutim, kod složenijih optimizacionih problema za rešavanje može se upotrebiti neka od optimizacionih metoda. Na primer, Njutnova metoda je standardna metoda za rešavanje ovakvih tipova problema.

1.7.3 Princip dualnosti

U matematičkoj teoriji optimizacije dualnost znači da se jedan optimizacioni problem može posmatrati na dva načina, odnosno kao primalni problem ili kao dualni problem. Ovaj princip se zove princip dualnosti.

Da bi se razumeo ovaj koncept treba da se razume šta je to donja granica nekog skupa. Pojam donje granice objasniće se na podskupu realnih brojeva. Ako se izabere jedan realan broj i ako je taj broj manji ili jednak svakom elementu nekog podskupa realnih brojeva može se reći da taj broj predstavlja donju granicu. Na primer neka je dat skup $S = \{2, 4, 8, 10\}$. Ovaj skup može imati beskonačno donjih granica, na primer broj 1 ili broj –3 itd.. Međutim, broj 2 je veći od svih ostalih donjih granica i zove se infimum odnosno najveća donja granica. Ista logika se primenjuje i kod koncepta najmanje gornje granice odnosno supremuma.

Princip dualnosti kaže da ako se ima problem minimizacije on se može posmatrati i kao problem maksimizacije. Ako se nađe maksimum ovog problema on će biti donja granica rešenja problema minimizacije. Drugim rečima, on će biti uvek manji ili jednak minimumu problema minimizacije.

Princip dualnosti pokazaće se na primeru opšteg nelinearnog optimizacionog problema koji je dat jednačinama (1.17) – (1.19), a koje će se ovde iz praktičnih razloga ponoviti:

$$\min f(\mathbf{x}), \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\, g_j(\mathbf{x}) &\geq 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, J \\ h_k(\mathbf{x}) &= 0, \;\; k = 1, 2, \ldots, K \end{aligned}, \tag{1.30}$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \cdots x_N]^T, \tag{1.31}$$

Ovako definisan optimizacioni problem može se posmatrati kao primalni problem. Dualni problem se definiše na sledeći način:

$$\max \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \tag{1.32}$$

$$\text{p.o.}\, \mu_j \geq 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, J, \tag{1.33}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \; \lambda_2 \cdots \lambda_K]^T, \;\; \boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \; \mu_2 \cdots \mu_J]^T, \tag{1.34}$$

gde je:

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\mathbf{x}} \left\{ f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{J} \mu_j g_j(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k h_k(\mathbf{x}) \right\}, \tag{1.35}$$

U izrazu (1.35) funkcija "inf" predstavlja infimum funkcije, odnosno u ovom slučaju proširene Lagranžove funkcije primalnog problema.

Za dopustive tačke primalnog i dualnog optimizacionog problema važi osobina slabe dualnosti, odnosno uvek važi da je:

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq f(\mathbf{x}), \tag{1.36}$$

Stroga dualnost važi pod određenim uslovima koje moraju da ispune kriterijumske funkcije i funkcije ograničenja. Na primer, ako su u posmatranom opštem nelinearnom optimizacionom problemu funkcije f i g konveksne, a funkcija h je linearna kombinacija upravljačkim promenljivih $\mathbf{x}$, tada su optimalne vrednosti primalnog i dualnog problema jednake.

Razlika između vrednosti kriterijumske funkcije primala i kriterijumske funkcije duala:

$$f(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \tag{1.37}$$

naziva se dualna razlika ili dualno odstupanje. Imajući u vidu osobinu slabe dualnosti važi sledeći izraz:

$$f(\mathbf{x}) - f^* \le f(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \tag{1.38}$$

gde je f^* optimalna vrednost kriterijumske funkcije f. Prema ovom izrazu, ako je dualna razlika jednaka nuli onda je **x** optimlno rešenje primalnog problema, a samim tim **λ** i **μ** su optimalna rešenja dualnog problema. Dualna razlika može da se upotrebi i kao kriterijum za zaustavljanje kod nekih iterativnih metoda. Ako je $f(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \le \varepsilon$, onda sigurno važi i da je $f(\mathbf{x}) - f^* \le \varepsilon$.

Princip dualnosti pored teroijskog ima i praktičan značaj. Ponekad je lakše rešiti dualni problem nego primalni, posebno kod problema kod kojih je broj upravljačkih promenljivih znatno veći od broja ograničenja. Međutim, dualni pristup ne garantuje uspeh i to uglavnom zavisi od karakteristika kriterijumske funkcije i funkcija ograničenja. Princip dualosti biće ilustrovan sledećim primerom.

Primer 1.4

Rešiti optimizacioni problem primenom principa dualnosti:

$$\min\ f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 .$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\, & x_1 + x_2 \ge 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}\ .$$

Lagranžova funkcija za dati optimizacioni problem je:

$$L(\mathbf{x}, \mu) = x_1^2 + x_2^2 - \mu(x_1 + x_2 - 4) .$$

Dualna funkcija je onda:

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= \inf_{\mathbf{x}} \{L(\mathbf{x}, \mu)\} \\ &= \inf_{\mathbf{x}} \{x_1^2 + x_2^2 - \mu(x_1 + x_2 - 4)\} \\ &= 4\mu + \inf_{\mathbf{x}} \{x_1^2 + x_2^2 - \mu x_1 - \mu x_2\} \\ &= 4\mu + \inf_{x_1 \ge 0} \{x_1^2 - \mu x_1\} + \inf_{x_2 \ge 0} \{x_2^2 - \mu x_2\} \end{aligned} .$$

Za fiksnu vrednost μ infimum funkcije $L(\mathbf{x}, \mu)$ po **x** se dobija za $x_1(\mu) = \dfrac{\mu}{2}$ i $x_2(\mu) = \dfrac{\mu}{2}$. Prema tome dualni optimizacioni problem se sada može opisati sledećim jednačinama:

$$\max \phi(\mu) = 4\mu - \frac{\mu^2}{2},\ \ \mu \ge 0 .$$

Izjednačavanjem prvog izvoda dualne kriterijumske funkcije sa nulom,

$$\frac{\partial \phi(\mu)}{\partial \mu} = 4 - \mu = 0 .$$

dobija se optimalna vrednost za veličinu μ, odnosno $\mu^* = 4$. Optimalna vrednost dualne funkcije je $\phi^* = 8$. Za promenljive $\mathbf{x}$ dobijaju se vrednost $x_1 = 2$ i $x_2 = 2$. Optimalna vrednost primalne kriterijumske funkcije je $f^* = 8$. Može se reći da je ispunjena osobina stroge dualnosti što je bilo očekivano s obzirom na oblik funkcija kod primalnog problema.

Potrebno je reći da je prethodno izložena terorija o uslovima optimalnosti data bez dokaza odgovarajućih teorema, i bez dublje matematičke analize svih mogućih aspekata. Detaljne analize je moguće pogledati u [12].

1.8 Rezime

Neophodno je da se naglasi da ne postoji jedinstvena optimizaciona metoda za određivanje globalnog minimuma/maksimuma proizvoljne kriterijumske funkcije. Izbor adekvatne metode zavisi od prirode kriterijumske funkcije i upravljačkih promenljivih. Upravljačke promenljive mogu da budu kontinualne ili diskretne. Mogu da budu realne ili celobrojne. Takođe, mogu da budu determinističke ili stohastičke. Sam optimizacioni problem može da bude modelovan kao linearan ili nelinearan. Zatim, izbor optimizacione metode veoma zavisi od toga da li postoje ograničenja i kakvog su tipa. Broj kriterijumskih funkcija koje treba simultano optimizovati takođe utiče na izbor optimizacione metode. Generalno gledano tek kada se optimizacioni problem opiše analitički sledi izbor adekvatne optimizacione metode. U nekim slučajevima kombinacija dve ili više optimizacionih metoda daje najbolji rezultat.

Potrebno je reći da se u teroriji optimizacije i u praktičnim primenama može sresti veliki broj različitih optimizacionih metoda. Poslednjih decenija zahvaljujući razvoju brzih računara nastale su mnoge savremene metode koje su sposobne da reše vrlo kompleksne optimizacione probleme. Trend nastanka novih optimizacionih metoda koje prate razvoj sve bržih računara nastaviće se i u budućnosti.

U poglavljima koja slede dat je detaljan prikaz više odabranih optimizacionih metoda. U prvom delu knjige obrađene su neke od standardnih klasičnih optimizacionih metoda, a u drugom delu knjige moderne optimizacione metode. Može se reći da je u ovoj knjizi malo veća pažnja posvećena savremenim metodama što je u skladu sa današnjim trendovima u oblasti optimizacije. U tom maniru, na kraju knjige u posebnom poglavlju obrađeni su savremeni načini za modelovanje promenljivih u procesu optimizacije kao što su Fuzzy brojevi i Monte Carlo simulacija.

Literatura

[1] Singiresu S. Rao, Engineering Optimisation – Theory and Practice, Fourth Edition, 2009 John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, ISBN: 978-0-470-18352-6.

[2] G.B. Dantzig, Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities, Activity Analysis of Production and Allocation, pages 339–347, 1947.

[3] Richard Bellman, Dynamic Programming, 1957, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.

[4] Kuhn, H. W., Tucker, A. W., Nonlinear Programming. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 481–492, University of California Press, Berkeley, Calif., 1951.

[5] Holland, H. J., Adaptation in Natural and Artificial Systems, an introductory analysis with application to biology, control and artificial intelligence, The university of Michigan Press, Ann Arbor, USA, 1975.

[6] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, Jr., M. P. Vecchi, Optimization by Simulated Annealing, Science, Vol. 220, No. 4598, 1983.

[7] J. Kennedy, R. Eberhart, Particle swarm optimization, Neural Networks, 1995. Proceedings, IEEE International Conference on, 27 Nov.–1 Dec., 1995, Perth, WA, Australia

[8] M. Dorigo, "Optimization, learning and natural algorithms," PhD thesis, Department of Electronics, Politecnico di Milano, Italy, 1992.

[9] Hopfield, J.J. and Tank, D.W., Neural computation of decisions in optimization problems. *Biological Cybernetics*, (1985), **52**, 141–152.

[10] S. S. Rao, Description and optimum design of fuzzy mechanical systems, ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 109, pp. 126–132, 1986.

[11] Coello C. A. C., Evolutionary Algorithms for Solving Multi–Objective Problems.

[12] D. G. Luenberger, Y. Ye, Linear and Nonlinear Programming, Fourth Edition, Springer, 2016.