

---

---

# IDENTIFIKACIJA PROCESA

---

---

BRANKO D. KOVAČEVIĆ  
GORAN S. KVAŠČEV

*Univerzitet u Beogradu  
Elektrotehnički fakultet*

Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet  
Akademska misao  
Beograd 2018.

Dr Branko D. Kovačević

Dr Goran S. Kvašček

## IDENTIFIKACIJA PROCESA

Recenzenti

Prof. dr Željko Đurović

*Redovni profesor, Univerzitet u Beogradu*

Prof. dr Milorad Božić

*Redovni profesor, Univerzitet u Banja Luci*

---

Odlukom Nastavno-naučnog veća Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu  
ova knjiga je odobrena kao udžbenik na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.

---

*Izdavači*

Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet, Beograd  
Akademska misao, Beograd

*Štampa*

Akademska misao, Beograd

*Tiraž*

200 primeraka

ISBN 978-86-7225-062-6 (e-izdanje)

ISBN 978-86-7466-732-3 (štampano izdanje)

---

# Sadržaj

---

Predgovor	v
<b>1 Modeliranje</b>	<b>1</b>
1.1 Definicija i zadaci modeliranja sistema . . . . .	1
1.2 Pristupi izgradnji modela sistema . . . . .	3
1.2.1 Deduktivni pristup . . . . .	3
1.2.2 Induktivni pristup . . . . .	5
<b>2 Black-box reprezentacije modela sistema</b>	<b>19</b>
2.1 Diskretni signali i sistemi . . . . .	21
2.1.1 Impulsni odziv i funkcija prenosa linearnog diskretnog vremenski invarijantnog sistema . . . . .	23
2.2 Poremećaji . . . . .	27
2.2.1 Statističke i stohastičke karakteristične veličine za karakterizaciju poremećaja	28
2.3 Parametarska reprezentacija black-box modela sistema u vremenskom domenu . . . . .	41
2.3.1 FIR model (model sa konačnim impulsnim odzivom) . . . . .	42
2.3.2 ARX model (Auto-regresioni model sa spoljašnjim ulazom) . . . . .	43
2.3.3 ARMAX model (Autoregresioni model pomičnih sredina sa spoljašnjom pobudom) . . . . .	45
2.3.4 OE model (Model greške izlaza) . . . . .	47

2.3.5	BJ model (Box-Jenkinsov model) . . . . .	49
2.4	Opšta neparametarska reprezentacija black-box modela . . . . .	52
2.5	Neparametarska identifikacija sistema . . . . .	52
2.5.1	Neparametarska identifikacija sistema u vremenskom domenu: metod korelacione analize . . . . .	53
2.5.2	Neparametarska identifikacija sistema u frekvencijskom domenu . . . . .	56
2.6	Neparametarska prezentacija “black-box” modela sistema u frekvencijskom domenu . . . . .	62
2.6.1	Frekvencijska karakteristika (funkcija ili lik) sistema . . . . .	62
2.6.2	Spektar snage signala . . . . .	63
2.6.3	Transformacija spektra signala . . . . .	68
2.6.4	Primeri izračunavanja stohastičkih pokazatelja slučajnih signala . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Neparametarska identifikacija sistema na bazi Fourierove analize: empirijska procena funkcije prenosa sistema</b> . . . . .	<b>79</b>
3.1	ETFE procena funkcije prenosa . . . . .	81
3.1.1	Osobine ETFE procene . . . . .	83
3.1.2	Usrednjavanje (interpolacija ili glačanje) ETFE procene . . . . .	92
3.2	Uslov perzistentne eksitacije . . . . .	95
3.2.1	Definicija perzistentne eksitacije . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Parametarska identifikacija</b> . . . . .	<b>99</b>
4.1	Modeli predikcije: jednokoračna predikcija unapred . . . . .	101
4.1.1	Model predikcije za standardni parametarski model . . . . .	101
4.1.2	Model predikcije za FIR reprezentaciju sistema . . . . .	104
4.1.3	Model predikcije za ARX reprezentacije modela sistema . . . . .	105
4.1.4	Model predikcije za ARMAX reprezentaciju modela sistema . . . . .	106
4.1.5	Model predikcije za OE strukturu modela sistema . . . . .	107
4.1.6	Model predikcije za BJ strukturu modela sistema . . . . .	109
4.2	Parametarska identifikacija sistema: Metod najmanjih kvadrata . . . . .	112
4.2.1	Linearan metod najmanjih kvadrata: LLS metod . . . . .	113
4.2.2	Linearni metod težinskih (ponderisanih) najmanjih kvadrata: WLS metod . . . . .	122
4.2.3	Pseudo-linearni metod najmanjih kvadrata: PLLS metod . . . . .	123

---

4.3	Primer identifikacije parametara ARX modela prvog reda . . . . .	135
4.4	Primer identifikacije parametara ARX/ARMAX/OE modela prvog, drugog i trećeg reda u prisustvu mernog šuma . . . . .	143
4.4.1	Eksperiment bez mernog šuma . . . . .	143
4.4.2	Promenljiv šum merenja . . . . .	143
4.4.3	Promenljiva perioda odabiranja . . . . .	145
4.4.4	Primena <i>MATLAB systemIdentification toolbox</i> -a . . . . .	148
<b>5</b>	<b>Analiza algoritma najmanjih kvadrata: konvergencija i konzistencija procena parametara</b>	<b>153</b>
5.1	Linearni algoritam najmanjih kvadrata (LLS) . . . . .	153
5.2	Pseudo-linearni metod najmanjih kvadrata (PLLS) . . . . .	161
5.2.1	Aproksimativna identifikacija . . . . .	163
5.2.2	Filtriranje grešaka predikcije . . . . .	167
<b>6</b>	<b>Rekurzivni metod najmanjih kvadrata</b>	<b>169</b>
6.1	Dijagram toka RLLS algoritma . . . . .	175
6.2	Primer rekurzivna identifikacija ARX modela prvog i drugog reda . . . . .	179
6.2.1	Rekurzivno skupljanje podataka . . . . .	179
6.2.2	Faktor zaboravljanja . . . . .	179
	<b>Literatura</b>	<b>187</b>



---

# Predgovor

---

Ovaj tekst je napisan u najvećem delu u formi udžbenika i, mada sadrži i delove koji proističu iz sopstvenih istraživanja autora, daje uvodna razmatranja o naučnim disciplinama, kao što su modeliranje, identifikacija, simulacija sistema i tehnike optimizacije. Ove naučne oblasti imaju dominantnu ulogu u mnogobrojnim inženjerskim strukama, kao što su elektrotehnika, mašinstvo, hemijsko inženjerstvo, ekologija, robotika i mehatronika, biomedicinske tehnike, aeronautika i fizika. Bilo koji student tehnike mora u današnje vreme da poseduje adekvatno znanje o generalnoj analizi i alatima za sintezu matematičkih modela prirodnih fenomena ili veštački izazvanih pojava, kao i njihovoj simulaciji na računaru. U naučno-tehnološkoj literaturi su retke knjige koje na jedinstven način tretiraju sve ove različite oblasti, dok postoji veliki broj publikacija koje detaljno razmatraju samo pojedinačne oblasti, ne ulazeći u njihovu interakciju sa drugim srodnim oblastima. Neke od značajnih knjiga, počevši od 70-tih godina prošlog veka kada su se pojavile prve publikacije na ovu temu, navedene su u literaturi koja je data na kraju ove knjige.

Polazeći od ove konstatacije, autori su u poslednjih dvadeset godina razvili materijal za jedno-semestralni kurs na redovnim studijama elektrotehnike u trajanju od petnaest nedelja, sa fondom od tri časa predavanja i dva časa laboratorijskih vežbi, u kome se na jedinstven i sistematičan način razmatraju pomenute oblasti modeliranja, identifikacije, simulacije i optimizacije, pri čemu je posebna pažnja posvećena njihovoj međusobnoj interakciji. Imajući u vidu generalnu prirodu i široku primenjivost oblasti modeliranja, identifikacije, simulacije i optimizacije, udžbenik je pisan tako da ne zahteva veliko predznanje od studenata. Pretpostavlja se da čitalac poseduje izvesno poznavanje oblasti matematičkog modeliranja dinamičkih sistema u obliku diferencijalnih ili diferencnih jednačina određenog reda, sistema diferencijalnih ili diferencnih jednačina prvog reda u prostoru varijabli stanja, kao i frekvencijskom odzivu linearnog dinamičkog sistema. Ove oblasti izučavaju se tokom prve dve godine studija skoro na svim tehničkim fakultetima, tako da udžbenik može korisno poslužiti ne samo studentima elektrotehnike, kojima je primarno namenjen, već i studentima drugih tehničkih fakulteta, kao i inženjerima različitih usmerenja koji se u svojoj praksi susreću sa modeliranjem dinamičkih sistema, njihovom identifikacijom i simulacijom na računaru.

U knjizi su razmatrana dva osnovna pristupa sintezi matematičkih modela: deduktivni i in-

duktivni prilaz. Razvijanje matematičkog modela na bazi deduktivnog pristupa podrazumeva prethodno poznavanje fizičkog ponašanja posmatranog sistema, koje se ogleda u poznavanju fizičkih ili hemijskih zakona kojima se na idealizovan način opisuju dinamičke veze između promenljivih i parametara u sistemu. Dinamičke veze između varijabli obično su date u obliku diferencijalnih jednačina, u kojima figuriše određeni broj parametara. Ukoliko se vrednosti ovih parametara mogu odrediti na osnovu razmatranja fizičkih gabarita, ovakvi modeli se nazivaju "modeli bele kutije" (eng. *white box*). Prilikom primene ovakvog pristupa, važno je imati u vidu činjenicu da isti sistem može biti prikazan različitim matematičkim modelima, pošto je sistem pojava koja se menja u prostoru i vremenu i kao takva može se posmatrati sa različitih aspekata. Izabrani aspekt posmatrana neke pojave određen je namenom projektovanog modela, tako da je dobijeni model subjektivna predstava projektanta o razmatranom realnom fenomenu. Druga važna činjenica u postupku modeliranja je kauzalnost, odnosno uzročno-posledična zavisnost, pošto su fizičko-hemijski zakoni kojima je opisana posmatrana realna pojava (sistem) formulisani u obliku matematičkih relacija između varijabli i parametara, ne vodeći pri tome računa o uzročno-posledičnim vezama između varijabli, a koje se nazivaju kauzalnost. S obzirom da realnost ne vodi računa o kauzalnosti, projektantu je ostavljeno u zadatak da uvede uzročno-posledične efekte, tako da je kauzalnost matematičkog modela rukotvorina modelara.

Obične diferencijalne jednačine (eng. *Ordinary Differential Equations*) predstavljaju uobičajeno sredstvo da se matematički opiše ponašanje dinamičkih sistema i izvede kauzalan matematički model. Međutim, izvođenje diferencijalnih jednačina na osnovu fizičkog opisa posmatrane realne pojave nije uvek jednostavan zadatak. Stoga je prirodniji način da se matematički model formuliše kroz skup diferencijalnih i algebarskih relacija između varijabli koje opisuju fizičko ponašanje analiziranog sistema (eng. *Differential-Algebraic Equations*, ili skraćeno DAE). Izgradnja ovakvih nekauzalnih ili akauzalnih matematičkih modela delimično je razmatrano i u ovoj publikaciji. Alternativni prilaz sintezi akauzalnih modela zasnovan je na bond grafovima, koji predstavljaju unificirani pristup sintezi modela sistema kao mreže međusobno povezanih fizičkih komponenti. Međusobna interakcija između komponenti definisana je kao razmena energije, što omogućava da se izdvoje i naznače značajne varijable u modelu, koje reprezentuju prikupljanje i protok energije. Ovakav pristup pruža veće mogućnosti u izgradnji matematičkih modela sistema, ali je zbog ograničenog fonda časova studijskog programa izostavljan iz ovog materijala. U inženjerskoj praksi postoje i problemi koji zahtevaju drugačiji pristup matematičkom modeliranju realnih fenomena koji su zasnovani na primeni diferencijalnih jednačina, događajima vezanim za varijable stanja sistema ili vremenski diskretnim događajima. Ovakvi pristupi modeliranju, kao i složeniji opisi realnih sistema koji se baziraju na kombinaciji navedenih pristupa, takođe su razmatrani u knjizi.

Ukoliko ne postoje apriorna znanja o fizičkom ponašanju posmatranog sistema, ili je ovakvo predznanje nedovoljno, model sistema može se izgraditi na osnovu prikupljenih merenja na sistemu. Postupak prikupljanja mernih podataka sa sistema naziva se indukcija, a ovakav pristup izgradnje matematičkog modela sistema naziva se induktivnim, a dobijeni model naziva se "model crne kutije" (eng. *black box*). U ovom tekstu razmatrani su opšti linearni neparametarski modeli tipa crne kutije u vremenskom i frekvencijskom domenu, kao i statističke i stohastičke karakteristične veličine za karakterizaciju slučajnih nekontrolabilnih poremećaja na izlazu linearnog sistema kojim je približno opisano fizičko funkcionisanje realnog dinamičkog sistema. Uspešno praćenje izložene materije podrazumeva da čitalac poseduje predznanje iz matematičke teorije verovatnoće,



slučajnih varijabli i stohastičkih signala. Ovakvi kursevi se uobičajeno predaju na drugoj godini studijskog programa većine tehničkih fakulteta.

U nastavku je pokazano da se prikupljena merenja na sistemu mogu upotrebiti za sintezu linearnih parametarskih modela koji približno opisuju ponašanje realnog dinamičkog sistema. Pored opšteg parametarskog modela razmatrani su i njegovi specijalni slučajevi kao što su linearni sistem sa konačnim impulsnim odzivom (eng. *Finite Impulse Response* ili skraćeno FIR), auto-regresioni model sa eksternim ulazom (eng. *Auto-Regressive with eXogenous input* model ili skraćeno ARX); auto-regresioni model sa pomičnim sredinama i egzogenom pobudom (eng. *Auto-Regression with Moving Average and eXogenous input* ili skraćeno ARMAX), model tipa greške jednačine (eng. *Output Error* model ili skraćeno OE) i *Box-Jenkins*-ov model (skraćeno BJ).

U okviru identifikacije neparametarskih modela crne kutije detaljno su razmatrane sledeće metode:

1. korelacioni metod za procenu (estimaciju) odbiraka impulsnog odziva, koji traje neograničeno vreme, neparametarskog modela crne kutije u vremenskom domenu. Na taj način, odbirci impulsnog odziva linearnog sistema kojim se aproksimira ponašanje linearnog dinamičkog sistema predstavljaju nepoznate parametre koji se estimiraju na osnovu merenja, a pošto impulsni odziv traje neograničeno, broj parametara je neograničen, te se model naziva neparametarskim;
2. eksperimentalno snimljen frekvencijski odziv za empirijsku identifikaciju neparametarskih modela u frekvencijskom domenu, gde nepoznate parametre predstavljaju odbirci amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike linearnog stabilnog sistema kojim je aproksimirano ponašanje realnog dinamičkog sistema u frekvencijskom domenu. Naime, amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika je kompleksna funkcija realne kontinualne fizičke varijable, koja predstavlja učestanost, tako da je broj njenih odbiraka u frekvencijskom domenu neograničen. Pošto su navedeni odbirci u frekvencijskom domenu nepoznati parametri koje treba estimirati na osnovu eksperimentalnih merenja, a broj ovih parametara je neograničen, model se naziva neparametarskim. U praksi se, naravno, estimira konačan broj parametara na konačnom skupu mernih učestanosti u frekvencijskom području od interesa za rad sistema;
3. korelacione metode za neparametarsku identifikaciju modela crne kutije u frekvencijskom domenu. Metod se primenjuje za određivanje odbiraka amplitudno-fazno frekvencijske karakteristike na učestanostima od interesa, a njegovim ponavljanjem za više učestanosti može se približno estimirati amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika sistema na konačnom skupu učestanosti u frekvencijskom području od interesa;
4. empirijski metod za procenu amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike na skupu učestanosti od interesa (eng. *Empirical Transfer Function Estimation method* ili skraćeno ETFE metod) primenom diskretne Furijeove transformacije na ulazno-izlazna merenja na sistemu. Kvalitet ovakve procene analizira se na osnovu pojma tačnosti ili nepomerivosti (eng. *unbiased estimate*), koji označava da je srednja vrednost (očekivanje) procene jednaka nepoznatoj, tačnoj veličini koja se estimira, kao i pojma preciznosti, koji podrazumeva da je nepomerena procena konzistentna, u smislu da se varijansa ovakve procene smanjuje sa porastom dužine

mernog uzorka na kome se bazira procena, te asimptotski teži nuli kada dužina mernog uzorka neograničeno raste.

Alternativa amplitudno-faznoj frekvencijskoj karakteristici, koja predstavlja karakteristiku kompleksnog pojačanja sistema na različitim učestanostima, kao neparametarski model tipa crne kutije u frekvencijskom domenu je spektralna gustina snage, ili energetski spektar sistema. U materijalu je definisan pojam kvazistacionarnosti, kao generalizacija pojma široke stacionarnosti kod slučajnih signala, kojim su na unificiran način, putem generalisanog matematičkog očekivanja tretirani deterministički i stohastički signali, a spektralna gustina snage definisana je, na klasičan način, kao Furijeova transformacija auto-kovarijacione funkcije kvazi-stacionarnog signala. U nastavku je razmatrana transformacija spektra prilikom prenosa (filtracije) kvazi-stacionarnog signala kroz linearni vremensko-invarijantni diskretan i stabilan sistem. Međutim, sa izuzetkom periodograma, nisu posebno razmatrane metode za estimaciju spektralne gustine snage.

U okviru problematike estimacije (procene) parametara u usvojenoj parametarskoj strukturi modela crne kutije definisan je metod greške predikcije (eng. *Prediction Error* ili skraćeno PE metod), koji omogućava da se problem estimacije parametara postavi kao optimizacioni problem, čijim se rešavanjem dolazi do optimalnih vrednosti nepoznatih parametara u modelu, kojima se na najbolji mogući način u datoj situaciji postiže slaganje sa realnim merenjima na sistemu. Za rešavanje postavljenog srednje-kvadratnog kriterijuma kvaliteta (eng. *Mean-Square Error* ili MSE kriterijum) ili indeksa performanse, čijom se minimizacijom dolazi do optimalne procene parametara modela, korišćen je metod najmanjih kvadrata (eng. *Least Squares* ili skraćeno LS metod). Ukoliko se usvoji FIR ili ARX struktura parametarskog modela crne kutije do optimalnog rešenja dolazi se u jednom koraku, a takva estimaciona procedura naziva se linearni metod najmanjih kvadrata. Za sve ostale parametarske reprezentacije modela crne kutije, kao što su ARMAX, OE ili BJ strukture modela, minimizacija MSE kriterijuma zahteva primenu više-koračnih numeričkih postupaka, kao što je na primer Njutn-Raphsson-ov iterativni numerički algoritam, a metod najmanjih kvadrata ovakvog tipa naziva se pseudo-linearnim. Razmatrane varijante linearnog i pseudo-linearnog metoda najmanjih kvadrata kojim se u jednom ili više koraka minimizira optimalni MSE kriterijum pripada klasi nerekurzivnih ili paketnih (eng. *batch* ili *off-line processing*) algoritama, pošto odjednom obrađuje ceo paket prikupljenih mernih podataka, nezavisno od rada samog sistema na kome su prikupljena merenja.

U knjizi su razmatrane i rekurzivne verzije ovih algoritama, koje su jednostavnije u računarskom smislu i omogućavaju da se proces estimacije parametara modela vrši u realnom vremenu, u toku rada sistema na kome se vrše merenja (eng. *recursive, on-line* ili *real-time* algoritmi).

Na kraju teoretskih razmatranja u ovom materijalu diskutovana je i aproksimativna identifikacija s obzirom da je realnost suviše složena da bi se potpuno tačno ili egzaktno opisala bilo kojim matematičkim modelom.

Tokom celog materijala korišćena je simulacija, kao važno numeričko sredstvo za sagledavanje praktičnih dometa izloženih teorijskih rezultata. Simulacija je korišćena za numeričko generisanje odziva u vremenu razmatranih matematičkih modela, kao i planiranje eksperimenata, odnosno za analizu uticaja izbora strukture i reda modela, tipa pobudnog signala, vrednosti periode diskretizacije (odabiranja) kod diskretnih merenja, efekata prefiltriranja mernih signala kao i drugih

praktičnih aspekata na kvalitet postupka identifikacije parametara modela u uslovima bliskim realnosti. Simulacija predstavlja prvi korak u postupku validacije modela, koji treba da odgovori na pitanje da li postavljeni matematički model zaista dobro opisuje fizičko ponašanje realnog dinamičkog sistema, što se sagledava kroz poređenje odziva modela dobijenog simulacijom sa realnim merenjima na sistemu.

Odlukom Nastavno-naučnog Veća Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu ova knjiga je odobrena za zvaničan udžbenik iz predmeta "Modeliranje i identifikacija procesa", a nastava iz pomenutog predmeta izvodi se na trećoj godini studijskog programa na Odseku za signale i sisteme. Autori posebnu zahvalnost duguju kolegama sa Katedre za signale i sisteme na inspirativnim diskusijama tokom niza godina, a koje su poslužile kao osnova za uvođenje pomenutog predmeta u nastavni plan, kao i izradu ovog materijala. Veliku zahvalnost autori duguju i recenzentima, dr Željku Đuroviću, red. Profesoru Univerziteta u Beogradu i dr Miloradu Božiću, red. Profesoru Univerziteta u Banjoj Luci, čije su korisne sugestije znatno doprinele poboljšanju kvaliteta udžbenika i njegovom dovođenju do završne forme.

U Beogradu, Autori Dana 25.04.2017.

## Modeliranje

---

### 1.1 Definicija i zadaci modeliranja sistema

Modeliranje je postupak dobijanja matematičkog opisa neke pojave koja se odvija u realnom svetu, kao što su na primer fizički, hemijski ili elektrotehnički procesi. Sa jedne strane, ovaj opis mora biti relativno jednostavan, a sa druge strane i dovoljno tačan, da bi odgovorio svojoj nameni koja je definisana od strane kreatora modela. Primena modeliranja nije ograničena samo na tehničke procese (fizičke, hemijske, mehaničke, električne, itd.), već se ono koristi u različitim oblastima, kao što su ekonomija, biologija, sociologija, itd.

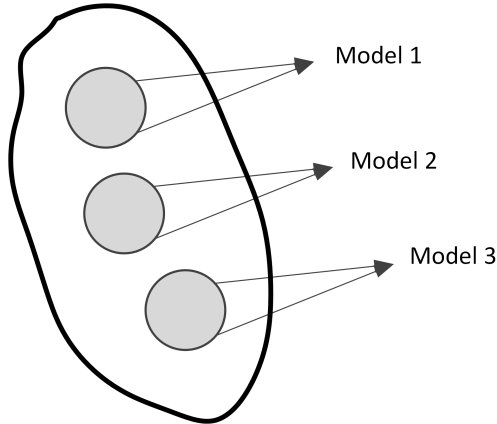
Postoji praktično neograničen broj modela koji opisuju različite aspekte jedne realne pojave. Na primer, jedna električna komponenta, kao što je otpornik, može da se proučava sa različitih stanovišta:

1. Kao električni element kojim je definisana linearna zavisnost između napona  $u$  na njegovim krajevima i struji kroz otpornik, tj. gde je  $R [\Omega]$  otpornost izražena u omima.
2. Kao termički element čija se temperatura  $T [^{\circ}\text{K}]$  menja po zakonu

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C} [Ri^2 - k(T - T_0)]$$

gde je  $C [\text{J}/^{\circ}\text{K}]$  toplotni kapacitet, a  $k [\text{W}^{\circ}/\text{K}]$  toplotna provodnost okoline čija je temperatura  $T_0 [^{\circ}\text{K}]$ .

3. Kao translatorno mehaničko telo, mase  $m [\text{kg}]$  na koga deluje sila gravitacije  $F_g = mg$



Slika 1.1: Različiti pogledi na realnu pojavu rezultuju u njene različite modele

4. Kao rotaciono mehaničko telo, odgovarajućeg momenta inercije  $J$  [ $\text{kgm}^2$ ], kod koga je veza između obrtnog momenta  $M$  [ $\text{Nm}$ ] i ugaonog ubrzanja  $\alpha$  [ $\text{rad/s}^2$ ] data sa relacijom  $M = J\alpha$ .

Svi ti različiti pogledi na realnu pojavu rezultuju različitim modelima.

Suština postupka modeliranja je da se izaberu samo one osobine posmatranog procesa koje predstavljaju potrebne i dovoljne karakteristike da se proces opiše dovoljno tačno sa stanovišta namene modela. Zadatak modeliranja je da osvetli glavne osobine i fenomene realnog procesa i da ih prevede na neki apstraktan jezik, kao što je jezik matematike. Na taj način, modeliranje predstavlja integralan deo nauke i tehnologije, koji obuhvata skoro sve oblasti ljudskog delovanja, počevši od filozofija i teologija, pa preko sociologija, psihologija, ekologija i ekonomija, konačno i do same tehnike (građevine, hemije, fizike, mašinstva, elektrotehnike, itd.).

Pojam modeliranja je neraskidivo povezan sa pojmom procesa ili sistema.

Sistem je skup stavki ili osobina koje predstavljaju zaokruženi deo realnog fenomena koji se proučava. Sistem je subjektivan pojam sa ograničenjima koja uključuju one osobine koje su najvažnije sa stanovišta modelara, a isključuje osobine od manjeg značaja za opis posmatranog realnog procesa. Model predstavlja sredstvo za opisivanje najbitnijih karakteristika sistema koji se proučava. Model mora posedovati prikaz objekata unutar sistema, tzv. komponenti sistema, kao i prikaz aktivnosti pod kojima će ti objekti međusobno delovati. Dakle, model reflektuje razumevanje realnog procesa, njegovih komponenti i njihove interakcije od strane samog modelara.

Važnu stavku prilikom formiranja modela predstavlja izbor ograničenja kojima je omeđen sistem. Ova ograničenja određuju koji će deo realnog procesa biti proglašen za sistem koji se proučava. Delovi realnog procesa koji nisu pridruženi sistemu, kao izolovanom delu realnosti, nazivaju se okolinom sistema. Ukoliko su granice sistema suviše široke može se dogoditi da je takav model sistema praktično nemoguće analizirati, pošto su mnoge važne osobine prekrivene

nevažnim detaljima. Sa druge strane, ukoliko su izabrane granice sistema suviše uske, sve relevantne karakteristike realnog procesa neće biti obuhvaćene njegovim modelom, što će rezultovati u neadekvatnu analizu sistema na bazi takvog modela.

Generalno, postoje dva načina primene modela sistema. Prvi od njih sastoji se u izvođenju eksperimenta u otvorenoj povratnoj sprezi. Kod ovakvog pristupa model se koristi za predviđanje budućih vrednosti relevantnih promenljivih u sistemu. Na primer, model se može koristiti za izradu vremenske prognoze ili za predviđanje budućih vrednosti nekih ekonomskih pokazatelja, kao što su nezaposlenost, profitna stopa i sl. Zadatak predikcije zahteva adekvatan opis odgovarajućih zakona kojima su podvrgnute relevantne promenljive u modelu, tako da male greške modeliranja mogu prouzrokovati velike greške u rezultatu analize koja je izvršena na bazi takvog netačnog modela.

Drugi pristup sastoji se u primeni modela u zatvorenoj povratnoj sprezi i ovakav pristup se obično koristi za projektovanje sistema upravljanja. Ukoliko je model deo sistema upravljanja u zatvorenoj povratnoj sprezi, takav sistem će redukovati dejstvo poremećaja, koji dolazi iz spoljašnje sredine, kao i same greške modeliranja. Na taj način, manje tačan model može se koristiti u ovoj drugoj primeni. Drugim rečima, zahtevana tačnost modeliranja zavisi od načina primene samog modela, odnosno da li se koristi u eksperimentu u otvorenoj povratnoj sprezi ili u okviru povratne petlje kod sistema upravljanja.

## 1.2 Pristupi izgradnji modela sistema

Postoji više načina da se izgradi model sistema, od kojih su najznačajniji sledeći pristupi:

1. Deduktivni pristup (polazi od opšteg ka posebnom).
2. Induktivni pristup (za razliku od prethodnog, polazi od posebnog da bi se došlo do opšteg).
3. Bond graf (dijagram veza komponenti sistema).

### 1.2.1 Deduktivni pristup

Ovaj pristup pretpostavlja primenu opštih iskustava koja su stečena prilikom modeliranja različitih specifičnih procesa. Uz to, pristup koristi i prethodno znanje o razmatranom procesu, koje se zasniva na poznavanju fizičkih zakona koji definišu matematičke relacije između relevantnih varijabli u idealizovanom modelu procesa sa idealizovanim fizičkim komponentama. Na primer, u idealizovanim fizičkim komponentama telo odgovarajuće mase se tretira kao tačkasto, uz zanemarivanje njegovih dimenzija, protoci su laminarni, koncentracije su homogeno raspodeljene u rezervoaru, mešavine su idealne i sl. Fizički zakoni se obično izražavaju u obliku algebarskih i/ili diferencijalnih jednačina.

U opštem slučaju, algebarske relacije definišu ponašanje procesa u ustaljenom (ravnotežnom) stanju ili tzv. statičko ponašanje procesa. Statički modeli se koriste da se odredi radna tačka

ili ravnotežno stanje procesa, na osnovu koje se dobija uvid u nominalne vrednosti relevantnih promenljivih, kao što su, na primer, pritisak, protok, temperatura ili profit. U industriji se statički modeli nazivaju “flow sheets”.

Dinamičko ponašanje procesa opisuje se diferencijalnim jednačinama. Ove jednačine su zasnovane na osnovnim fizičkim zakonima, kao što su zakon o održanju energije, mase, momenta i sl. Na primer, zakon o održanju mase izražava se u formi diferencijalne jednačine

$$\frac{dm}{dt} = \phi_{m,u} - \phi_{m,i}$$

gde je  $m$  [kg] masa, a  $\phi_m$  [kg/s] protok mase na ulazu ( $u$ ) i izlazu ( $i$ ), respektivno. Slično, zakon o održanju energije izražava se kao

$$\frac{dQ}{dt} = \phi_u - \phi_i$$

gde je  $Q$  [J] količina energije, a  $\phi$  [W] protok energije na ulazu ( $u$ ) i izlazu ( $i$ ), respektivno. Takođe, u mehanici se kretanje tela opisuje Njutnovim zakonom. Na primer, ako je pozicija tela mase  $m$  [kg] označena sa  $x$  [m] telo se kreće translatorno pod dejstvom aktivne sile  $F_a$  [N] uz prisustvo sile trenja  $F_t$  [N], tada je na osnovu Njutnovog zakona

$$ma = F_a - F_t, \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad F_{tr} = k_{tr}v \text{ [N]}, \quad v = \frac{dx}{dt} \text{ [m/s]}$$

odakle sledi diferencijalna jednačina

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k_{tr} \frac{dx}{dt} = F_a.$$

Na sličan način, rotacija tela momenta inercije  $J$  [kgm<sup>2</sup>], pod dejstvom aktivnog momenta  $M_a$  [Nm] i u prisustvu pasivnog momenta trenja  $M_t$  [Nm] i torzije  $M_e$  [Nm], opisana je Njutnovim zakonom

$$J\alpha = M_a - M_t - M_e$$

gde je  $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$  [rad/s<sup>2</sup>] ugaono ubrzanje,  $\theta$  [rad] ugaona pozicija tela, a moment trenja  $M_t = k_t\omega$  [Nm], gde je ugaona brzina  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  [rad/s], dok je momenat torzije  $M_e = k_e\theta$  [Nm].

Apriorno (prethodno) znanje može da se koristi i da se bliže odredi struktura modela sistema, pošto pored relacije koja povezuje ulazne i izlazne varijable sistema i sama struktura modela predstavlja stavku od interesa. Na primer, ako je na osnovu prethodnog znanja ustanovljeno da sistem ima dve vremenske konstante, tada će to znanje biti iskorišćeno da se iz svih mogućih struktura modela drugog reda izabere ona kojoj odgovaraju dve realne vremenske konstante, odnosno dva realna pola, umesto da se za model usvoji opšta funkcija prenosa drugog reda koja može imati i konjugovano kompleksne polove.

Navedeni pristupi obično dovode do kvalitativnog modela. Ponekada je, međutim, moguće da se procene adekvatno i vrednosti parametara u ovakvom modelu, obično koristeći prethodno znanje o fizičkim dimenzijama procesa.