Biljana Deretić-Stojanović
Šerif Dunica

OTPORNOST MATERIJALA

PETO IZDANJE

Beograd, 2018.

Dr Biljana Deretić-Stojanović, dipl. građ. inž.,
vanredni profesor Građevinskog fakulteta u Beogradu

Dr Šerif Dunica, dipl. građ. inž.,
redovni profesor Građevinskog fakulteta u Beogradu

OTPORNOST MATERIJALA
peto neizmenjeno izdanje

Recenzenti:
Dr Branislav Ćorić, dipl. građ. inž.,
redovni profesor Građevinskog fakulteta u Beogradu

Dr Stanko Brčić, dipl. građ. inž.,
redovni profesor Građevinskog fakulteta u Beogradu

Izdavači:
Građevinski fakultet,
Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73/I
Akademska misao, Beograd

Za izdavača
Prof. Dr Branko Božić

Štampa:
Akademska misao, Beograd

Tiraž:
300 primeraka

ISBN 978-86-7466-715- 8

SADRŽAJ

Napomena: *Materija koja pripada poglavljima koja su u Sadržaju zatamnjena se predaje u okviru predmeta Otpornost materijala 2.*

PREDGOVOR PETOM IZDANJU

Peto izdanje ovog udžbenika je preslikano četvrto izdanje u kome su prethodno izvršene popravke uočenih grešaka.

Beograd, januar 2018. god. *Autori*

PREDGOVOR ČETVRTOM IZDANJU

Četvrto izdanje ovog udžbenika je preslikano treće izdanje u kome su prethodno izvršene popravke uočenih grešaka.

Beograd, septembar 2016. god. *Autori*

PREDGOVOR TREĆEM IZDANJU

Treće izdanje ovog udžbenika je preslikano drugo izdanje u kome su prethodno izvršene popravke uočenih grešaka.

Beograd, maj 2014. god. *Autori*

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

Drugo izdanje ovog udžbenika je preslikano prvo izdanje u kome su prethodno izvršene popravke uočenih grešaka.

Beograd, novembar 2009. god. *Autori*

PREDGOVOR

Predloženi tekst ovog udžbenika predstavlja materiju koja je obuhvaćena novim nastavnim programima predmeta Otpornost materijala I i Otpornost materijala II na Građevinskom fakultetu u Beogradu, i po kome se predaje od školske 2006/07 godine. Iako je ovaj udžbenik prvenstveno namenjen studentima građevinskih fakulteta, on može biti koristan i drugim tehničkim strukama (arhitektura, mašinstvo i dr.). Predmet Otpornost materijala I slušaju studenti svih odseka u trećem semestru, a predmet Otpornost materijala II samo studenti konstruktivnog odseka u četvrtom semestru. Imajući u vidu da je materija koja je obuhvaćena programom predmeta Otpornost materijala II, manjeg obima, da predstavlja dopunu i nadogradnju materije koja se izlaže u predmetu Otpornost materijala I, pa je samim tim neraskidivo povezana s njom, autori su odlučili da u okviru ovog udžbenika predstave integralni tekst oba predmeta. Na taj način će studenti konstruktivnog odseka moći lakše da prate materiju oba predmeta, a studentima ostalih odseka dodatna materija može biti od koristi. Neke oblasti koje su izložene u okviru ovog udžbenika mogu biti od koristi i inženjerima iz tehničke prakse. Sadržaj udžbenika je podeljen na dva dela: Opšta teorija i Teorija grede.

Materija prvog dela (**Opšta teorija**) izložena je kroz pet poglavlja. Prvim i drugim poglavljem obuhvata se analiza napona i analiza malih deformacija. Naglašava se tenzorski karakter stanja napona i stanja deformacije bez insistiranja na tenzorskoj notaciji, tako da se svi potrebni izrazi prikazuju u razvijenom obliku. U trećem poglavlju se uspostavlja veza između napona i deformacije, uvodi se pojam idealnih tela i posebno se definišu konstitutivne jednačine za idealno elastično, idealno plastično i viskoelastično telo. U četvrtom poglavlju se daje prikaz opštih jednačina teorije elastičnosti i obrađuju metode rešavanja ovog sistema jednačina. U petom poglavlju se formulišu pojmovi i osnovni stavovi vezani za energiju deformacije. Ovih pet poglavlja predstavlja teorijsku osnovu za analizu grednog nosača u različitim uslovima naprezanja koja je predmet drugog, glavnog i obimnijeg, dela udžbenika.

Drugi deo (**Teorija grede**) odnosi se na analizu naprezanja grednog nosača i sadrži sledećih jedanaest poglavlja. Na početku, u šestom i sedmom poglavlju se daje kratak prikaz sila u preseku i njihova veza sa naponima, i definišu se geometrijske karakteristike punog i tankozidnog poprečnog preseka. U osmom poglavlju se obrađuju naprezanja koja se odnose na linearno stanje napona, a to su: aksijalno naprezanje, čisto pravo i čisto koso savijanje i ekscentrično naprezanje. Torzija grednog nosača se obrađuje u devetom poglavlju. Rešava se prvo problem torzije grede kružnog poprečnog preseka na nivou elementarne teorije, a potom se, koristeći Saint-Venant-ov poluobratni postupak, rešava problem torzije grede čiji je presek proizvoljnog oblika, pa se prikazuje rešenje za eliptični i pravougaoni presek. Takođe se daje i rešenje torzije grede otvorenog i zatvorenog tankozidnog profila. U desetom poglavlju se prikazuje savijanje grede silama koristeći tehničku teoriju savijanja grede koja se zasniva na hipotezi Žuravskog, a daje se rešenje i za tankozidni otvoreni i zatvoreni presek. Kratak prikaz ograničene torzije otvorenog tankozidnog preseka dat je u pog lavlju jedanaest. Kombinovano naprezanje grednog nosača se razmatra u poglavlju dvanaest. U poglavlju trinaest se obrađuju statički neodređeni problemi pri aksijalnom naprezanju, torziji i savijanju silama. Zatim se, u poglavlju četrnaest razmatra savijanje grede opterećene aksijalnom silom i problem stabilnosti grede i formuliše dimenzionisanje prema izvijanju. Petnaesto poglavlje obuhvata elasto-plastičnu analizu grede i određivanje graničnog opterećenja. I na kraju, u poglavlju šesnaest, prikazano je dimenzionisanje grednog nosača prema dozvoljenim naponima, uz formulisanje uporednih napona za različite hipoteze loma, i dimenzionisanje prema graničnoj nosivosti.

Radi lakšeg razumevanja i dopune izloženih teorijskih postavki u tekstu je dat veliki broj rešenih primera (68), a na kraju svakog poglavlja, priložen je i kratak rezime materije koja se u tom poglavlju izlaže. Takođe je, da bi se proverilo stečeno znanje pri učenju ove materije, na kraju svakog poglavlja, dat i test sa pitanjima i ponuđenim odgovorima, kao i rešenja tog testa.

Autori su veoma zahvalni profesorima dr Branislavu Ćoriću i dr Stanku Brčiću na izvršenoj recenziji rukopisa, kao i studentu arhitekture Jovani Stojanović za pomoć pri pripremi udžbenika za štampu.

Beograd, april 2008. god. *Autori*

UVOD

Pod uticajem spoljašnjih sila sva se tela više ili manje deformišu, tj. menjaju svoj oblik i zapreminu. Iz Fizike znamo da je telo sastavljeno od odvojenih delića, molekula, koji su međusobno povezani privlačnim, molekularnim silama. Pri deformaciji tela menja se međusobni položaj molekula, menjaju se i unutrašnje sile težeći pri tome da uspostave prvobitni raspored molekula. U suštini, telo predstavlja ***diskretnu sredinu***.

Međutim, makroskopski posmatrano, može se usvojiti predstava o telu kao neprekidnom skupu materijalnih tačaka, ***neprekidnoj materijalnoj sredini***, ***kontinuumu***, pa se stoga govori o ***Mehanici neprekidnih sredina*** ili ***Mehanici kontinuuma.*** Prema ovoj koncepciji usvajamo da se unutrašnje sile, koje predstavljaju rezultat dejstva spoljašnjih sila, mogu definisati samo kao površinske sile preko zamišljenih presečnih površina u telu, pa time u stvari ponašanje mnoštva molekula zamenjujemo nekim prosečnim vrednostima.

Uvodeći pojam kontinuuma razlikujemo čvrsto telo od fluida, a u okviru fluida, tečnosti od gasova, tako da postoje i posebne naučne discipline koje ih izučavaju, tj. ***Mehanika čvrstog tela*** i ***Mehanika fluida***.

U okviru Mehanike čvrstih tela definiše se ***kruto (nedeformabilno) telo***, kod koga se rastojanja između tačaka ne menjaju i na njemu se izvode svi zakoni Statike i Dinamike. Međutim, stvarna tela pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja menjaju svoj oblik i zapreminu, tj. predstavljaju ***deformabilna tela***. Ponašanje ovakvih tela se izučava u ***Mehanici deformabilnog tela***.

U okviru Mehanike deformabilnog tela razvijen je čitav niz ***naučno-tehničkih disciplina***. U zavisnosti od vrste deformacije koju tretiraju razlikuje se ***Teorija elastičnosti, Teorija plastičnosti*** i ***Teorija viskoelastičnosti***. Ako se zanemare, odnosno uzmu u obzir efekti inercijalnih sila, onda je reč o ***Statici,*** odnosno ***Dinamici deformabilnog tela.*** U zavisnosti od veličine deformacija razlikujemo ***Teoriju malih (infinitezimalnih) deformacija*** i ***Teoriju velikih (konačnih) deformacija***. Problem nastanka prsline i loma opterećenog tela predmet je ***Mehanike loma***. Uticaj termičkih efekata se izučava u ***Termoelastičnosti***, ***Termoplastičnosti*** i ***Termoviskoelastičnosti***. Osim toga, u zavisnosti od oblika i geometrije posmatranog tela, razvile su se posebne teorije, kao na primer ***Teorija grede*** i ***Teorija ploča i ljuski*** (***Teorija površinskih nosača***). Naučna disciplina koja se bavi mehaničkim osobinama raznih kategorija tzv. idealnih tela kojima se aproksimira ponašanje stvarnih materijala naziva se ***Reologija***.

Ovaj udžbenik predstavlja samo uvod u Mehaniku deformabilnog tela i odnosi se na rešavanje problema od važnosti za tehničku praksu. Oslanjajući se na Teoriju elastičnosti, Teoriju plastičnosti, Teoriju viskoelastičnosti, Teoriju infinitezimalne deformacije i Teoriju grede, uvodeći određene hipoteze i uprošćenja, razvijena je posebna tehnička disciplina ***Otpornost materijala.*** Složen matematički aparat koji se koristi u navedenim teorijama čini njihovu primenu u inženjerskoj praksi gotovo nepristupačnom. Zadatak Otpornosti materijala je da uspostavi jednostavne i pogodne metode proračuna, ali pri tome i dovoljno tačne. Neka rešenja se izvode i elementarno, uvodeći izvesne hipoteze o deformaciji grede, i upoređuju se sa odgovarajućim rešenjima dobijenim prema strožijim teorijama. Opravdanost uvedenih pretpostavki potvrđuje se i poređenjem sračunatih vrednosti i onih dobijenih eksperimentima.

Mada se u Otpornosti materijala telo tretira kao deformabilno, neki stavovi i zaključci Mehanike krutog tela imaju u Otpornosti materijala veoma važnu primenu. Sva tela koja miruju ponašaju se kao kruta, jer im se rastojanja između tačaka ne menjaju. Prema tome, kada se pod dejstvom spoljašnjih sila deformacija tela završi, ono prelazi u stanje relativnog mirovanja, tada za njega važe svi stavovi i zakoni Mehanike krutog tela, koji se mogu proširiti osnovnom hipotezom Otpornosti materijala i na elementarne delove tog tela. ***Osnovna hipoteza Otpornosti materijala glasi***: za svaki elementarni deo, koji zamišljamo izdvojen iz nekog napregnutog deformabilnog tela, važe za skup unutrašnjih i spoljašnjih sila koje ga napadaju, odnosno prenose se preko presečnih površina ovog delića, isti zakoni Mehanike kao i za kruto telo.

Razvoj Mehanike deformabilnog tela počinje u 17. veku radovima Galilei-a, Hooke-a i Mariotte-a, da bi svoj veliki napredak doživela u 18. i 19. veku izvanrednim rezultatima Bernoulli-ja, Euler-a, Navier-a, Lagrange-a Green-a i Cauchy-ja, koji su postavili osnove Matematičke teorije elastičnosti. Niz drugih istraživača s kraja 19. veka dali su veliki doprinos Teoriji elastičnosti: Saint-Venant, Kirchhoff, Kelvin, Poisson, Lamé, Airy, Boussinesq, Clapeyron, Betti, Maxwell i drugi. U 20. veku razvijaju se nove metode rešavanja već formulisanih jednačina Teorije elastičnosti. U tom domenu značajan doprinos dali su Rayleigh, Love, Michell, Galerkin, Mushelišvili, Timošenko i drugi.

Teorija neelastičnih deformacija, kao što su viskoelastične i plastične deformacije, počinju da se razvijaju tek u 20. veku. Autori koji su dali značajniji doprinos iz ove oblasti su Tresca, Huber, Von Mises, Hencky, Prandtl, Reuss, Prager, kao i veliki broj savremenih istraživača.

I DEO

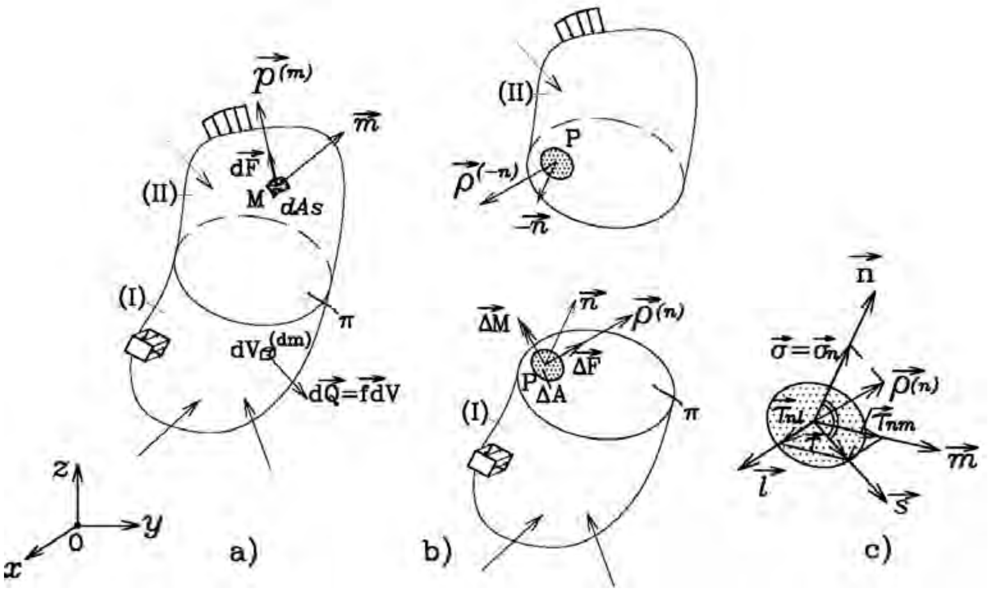
OPŠTA TEORIJA

Glava 1

ANALIZA NAPONA

1.1 SPOLJAŠNJE I UNUTRAŠNJE SILE. POJAM NAPONA

Posmatramo deformabilno telo (sl. 1.1.a) koje je u ravnoteži pod dejstvom ***spoljašnjih sila***. Spoljašnje sile mogu biti ***zapreminske*** ili ***površinske.***



Slika 1.1

Zapreminske spoljašnje sile deluju na svaki element zapremine tela. Ako se sa dV označi element zapremine tela u okolini neke tačke tada se zapreminska sila koja deluje na taj element izražava na sledeći način:

$$d\vec{Q} = \vec{f}\, dV \,, \tag{1.1}$$

gde je $\vec{f}$ sila po jedinici zapremine:

$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} \quad , \tag{1.2}$$

f_x, f_y, f_z su komponente zapreminske sile u pravcu koordinatnih osa x,y,z, a $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori osa x,y,z.

Zapreminska sila koja deluje na telo konačne zapremine V je:

$$\vec{Q} = \int_V \vec{f}\, dV \,. \tag{1.3}$$

Karakteristični primeri zapreminskih sila su gravitacione i inercijalne sile.

Površinske spoljašnje sile deluju preko spoljašnje površi tela. Površinska sila koja deluje na beskonačno mali element dA_s na spoljašnjoj površi tela u okolini tačke M iznosi:

$$d\vec{F} = \vec{p}^{(m)} dA_s \quad , \tag{1.4}$$

gde je $\vec{p}^{(m)}$ ***specifično površinsko opterećenje*** u tački M u kojoj je jedinični vektor spoljašnje normale $\vec{m}$. Specifično površinsko opterećenje $\vec{p}^{(m)}$ predstavlja silu po jedinici površine.

Kontaktne sile između dva ili više tela ili sile usled hidrostatičkog pritiska su primeri površinskih sila. Spoljašnje površinske sile mogu da budu koncentrisane, ako deluju u pojedinim diskretno raspoređenim tačkama spoljašnje površi tela, ili mogu biti kontinualno raspoređene po toj površi.

Kao posledica dejstva spoljašnjih sila ili dejstva nekih drugih uticaja kao što su neravnomerno zagrevanje tela, sleganje oslonaca i sl., telo se deformiše i u njemu se javljaju ***unutrašnje sile - naponi***. Usvaja se da unutrašnje sile deluju po zamišljenim presečnim površinama unutar tela. Uočimo jednu presečnu površ π čiji je položaj u prostoru određen vektorom spoljašnje normale $\vec{n}$ a kojom je telo podeljeno na delove (I) i (II) (sl. 1.1.b). Kako ovi delovi moraju biti u ravnoteži, prema aksiomu o vezama, moraju se uticaji jednog dela tela na drugi zameniti unutrašnjim silama koje deluju po kontaktnoj površi π, a to je ilustrovano na jednom malom delu površine ΔA. Na površi π uočimo tačku P i konačno mali element površine ΔA oko te tačke. Unutrašnje sile koje deluju na površinu ΔA redukuju se na tačku P, tako se dobija glavni vektor $\Delta\vec{F}$ i glavni moment $\Delta\vec{M}$.

Pretpostavićemo da veličina ΔA teži nuli, ali tako da tačka P stalno ostaje unutar elementa površine ΔA, tada količnik $\dfrac{\Delta\vec{M}}{\Delta A}$ teži nuli, a $\dfrac{\Delta\vec{F}}{\Delta A}$ konačnoj vrednosti $\vec{\rho}^{(n)}$, tj:

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{M}}{\Delta A} = 0, \qquad \vec{\rho}^{(n)} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA} \quad . \tag{1.5}$$

Veličina $\vec{\rho}^{(n)}$ se naziva ***napon*** ili ***vektor napona*** (vektor totalnog napona) u tački P, za presečnu ravan čija je normala $\vec{n}$. U nekoj drugoj tački ravni π napon će biti u opštem slučaju različit od napona u tački P. Takođe, za različite presečne ravni kroz posmatranu tačku P, napon će biti različit. Znači, napon je funkcija položaja i funkcija presečne ravni kroz datu tačku, tj.:

$$\vec{\rho}^{(n)} = \vec{\rho}^{(n)}(x, y, z) \quad . \tag{1.6}$$

S obzirom da se telo tretira kao neprekidna sredina, kontinuum, sledi da se u dvema bliskim tačkama, a za paralelne presečne ravni, naponi veoma malo razlikuju. Prema tome, ako se posmatra infinitezimalna okolina tačke P, može se pretpostaviti da je za paralelne presečne ravni veličina napona u svim njenim tačkama približno jednaka, tj. ***u okolini tačke stanje napona je homogeno***[1].

Napon $\vec{\rho}^{(n)}$ se javlja kao rezultat dejstva dela (II) na deo (I) u tački P (sl.1.1.b). Ako se posmatra dejstvo dela (I) na deo (II) u toj tački, dobija se napon po intezitetu jednak naponu $\vec{\rho}^{(n)}$ ali suprotnog smera, a pri tome je i vektor spoljašnje normale orijentisan u suprotnom smeru (-*n*), tako da je:

$$\vec{\rho}^{(-n)} = -\vec{\rho}^{(n)} \quad . \tag{1.7}$$

Dimenzija napona je sila/površina, na primer $N/m^2 = Pa$ (***paskal***).

Vektor napona $\vec{\rho}^{(n)}$ se može razložiti na dve ortogonalne komponente: komponentu $\vec{\sigma}$ koja leži u pravcu vektora normale presečne ravni i komponentu $\vec{\tau}$ u pravcu jediničnog vektora $\vec{s}$ koji leži u presečnoj ravni i ravni određenoj vektorima $\vec{n}$ i $\vec{\rho}^{(n)}$ (sl. 1.1.c):

$$\vec{\rho}^{(n)} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \sigma\vec{n} + \tau\vec{s} \,, \tag{1.8}$$

$$\sigma = \vec{\rho}^{(n)} \cdot \vec{n} \,, \qquad \tau = \vec{\rho}^{(n)} \cdot \vec{s} \,, \tag{1.9}$$

$$\tau = \sqrt{\left|\vec{\rho}^{(n)}\right|^2 - \sigma^2} \quad . \tag{1.10}$$

Komponenta $\vec{\sigma}$ se naziva ***normalni napon***, a komponenta $\vec{\tau}$ ***smičući (tangencijalni) napon***.

Normalni napon $\vec{\sigma}$ se još obeležava sa $\vec{\sigma}_n$.

Smičući napon $\vec{\tau}$, koji se naziva i ***totalni smičući napon,*** se može razložiti na dve ortogonalne komponente $\vec{\tau}_{nl}$ i $\vec{\tau}_{nm}$ u pravcima jediničnih vektora $\vec{l}$ i $\vec{m}$ koji takođe leže u presečnoj ravni (sl. 1.1.c), pa se tada vektor napona $\vec{\rho}^{(n)}$ može izraziti na sledeći način:

$$\vec{\rho}^{(n)} = \sigma_n\vec{n} + \tau_{nl}\vec{l} + \tau_{nm}\vec{m} \,. \tag{1.11}$$

Projekcije σ_n, τ_{nl} i τ_{nm} su pozitivne ako komponente vektora imaju smer jediničnih vektora $\vec{n}, \vec{l}$ i $\vec{m}$. Smičući naponi se obeležavaju sa dva indeksa

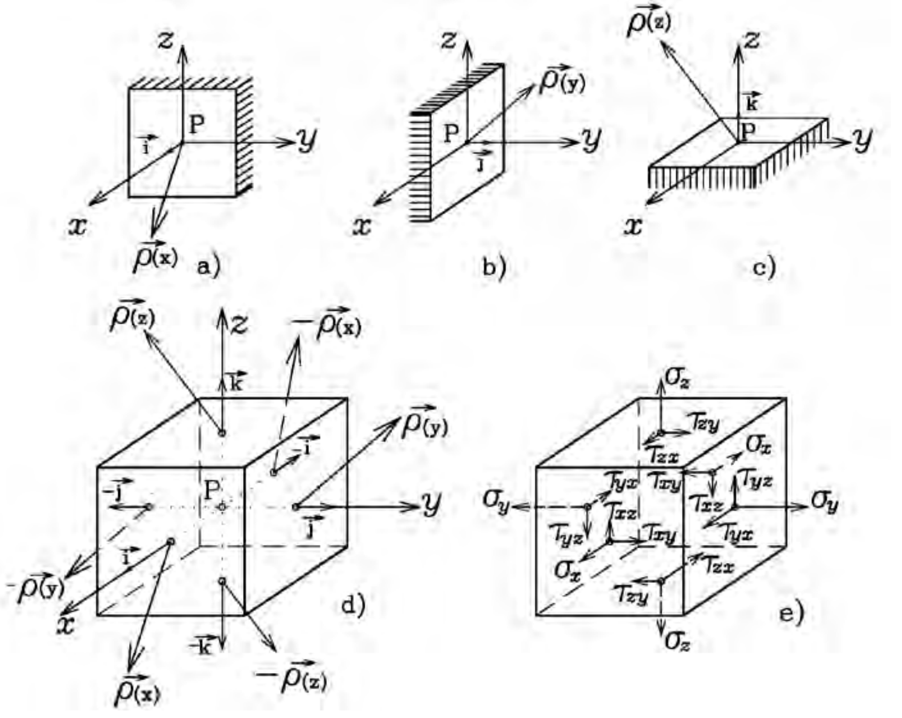
[1] Pretpostavka o homogenosti napona u okolini tačke nije opravdana u svim slučajevima i u svim tačkama, kao što je na primer bliska okolina napadnih tačaka koncentrisanih sila ili uopšte na mestima gde se javlja znatna koncentracija napona.

(τ_{nl} i τ_{nm}), prvi indeks označava normalu presečne ravni (n), a drugi indeks pravac u toj presečnoj ravni (l ili m) na koji je projektovan vektor napona $\vec{\rho}^{(n)}$.

1.2 STANJE NAPONA U TAČKI. TENZOR NAPONA

Pojam napona je vezan za tačku i presečnu ravan kroz tu tačku. Kako se kroz posmatranu tačku P može provući beskonačno mnogo presečnih ravni, to u tački P postoji beskonačno mnogo vektora napona $\vec{\rho}^{(n)}$. Skup svih vektora napona $\vec{\rho}^{(n)}$ za sve presečne ravni kroz tačku P naziva se ***stanje napona*** u tački P. Nadalje će biti pokazano da je ***za određivanje napona*** $\vec{\rho}^{(n)}$ ***za bilo koju presečnu ravan, a time i za poznavanje stanja napona u tački, potrebno i dovoljno da se poznaju vektori napona za tri međusobno nekomplanarne ravni u toj tački.***

Pretpostavićemo da su u nekoj tački tela poznati vektori napona za tri međusobno upravne presečne ravni koje su normalne na koordinatne ose x, y i z, to su koordinatne ravni. Vektore napona za koordinatne ravni označićemo sa $\vec{\rho}^{(x)}, \vec{\rho}^{(y)}$ i $\vec{\rho}^{(z)}$ (sl.1.2.a-c).



Slika 1.2