Зоран Пуцановић, Матеја Кнежевић, Марко Пешовић

ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА
АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА
ЕЛЕМЕНТИ ВЕРОВАТНОЋЕ И СТАТИСТИКЕ

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

АКАДЕМСКА МИСАО

Београд, 2017.

Зоран Пуцановић, Матеја Кнежевић, Марко Пешовић

ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА
АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА
ЕЛЕМЕНТИ ВЕРОВАТНОЋЕ И СТАТИСТИКЕ
ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

Рецензенти:

Др Милан Меркле
Др. Владимир Грујић

Издавачи:

Универзитет у Београду – Грађевински факултет
Академска мисао, Београд

Дизајн насловне стране

Зорица Марковић, академски сликар

Тираж: 200 примерака

ИСБН 978-86-7466-389-9

ПРЕДГОВОР

Збирка која се налази пред вама писана је по важећем програму курса Линеарна алгебра и статистика који се слуша у другом семестру основних студија Грађевинског факултета Универзитета у Београду. Њен циљ је првенствено да помогне студентима у што успешнијем припремању испита из наведеног предмета. Ипак, имајући у виду разноликост области заступљених на курсу, надамо се да би могла бити од користи и студентима других техничких и природно-математичких факултета.

Збирка је, сходно називу и програму предмета, подељена на три поглавља. Свако поглавље је подељено на неколико тематских јединица од којих свака садржи кратак теоријски увод, најбитније дефиниције као и теореме које би омогућиле студентима решавање задатака по темама. Наравно, то није било свуда могуће, а на неким местима је и намерно изостављено ради кохерентног разумевања читаве области или повезивања више њих. Овде првенствено мислимо на везу између Линеарне алгебре и Аналитичке геометрије.

Имајући у виду да је за математику иманентан доказ, а не опсервација, настојали смо да задатке решавамо што прецизније и детаљније, са јасном везом међу корацима. Такође смо, тамо где смо сматрали да је то корисно, наводили и више решења задатака, као и „ток мисли” који би био „идеја водиља” при даљем сусретању са истом или сличном материјом. Надамо се да смо у томе успели као и да смо успели да покријемо најбитније појмове из ових области.

Унапред смо захвални свима који нам укажу на недостатке и грешке у овој збирци, ма којег карактера оне биле. Посебно се захваљујемо рецензентима на свим корисним саветима и примедбама које су нам дали током писања овог рукописа.

Београд, јануар 2017. Аутори

Садржај:

Глава 1

Линеарна алгебра

1.1 Полиноми

Израз
$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$
за $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, зове се *полином* по промењивој x, над пољем реалних бројева. Елементи $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ су *коефицијенти* полинома $P(x)$. Ако је $a_n \neq 0$ кажемо да је полином $P(x)$ степена n, у ознаци $\deg P(x) = n$. Полином за који је $a_n = 1$ називамо *моничним полиномом.*

Теорема 1 *За сваки полином $P(x)$ и не-нула полином $Q(x)$ постоје јединствени полиноми $S(x)$ и $R(x)$ такви да важи следећа једнакост:*
$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x),$$
где је $R(x)$ полином са особином да је $\deg R(x) < \deg Q(x)$. Полином $Q(x)$ називамо количник, а полином $R(x)$ остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$.

Уколико је $R(x)$ нула полином, тј. $P(x) = Q(x)S(x)$, кажемо да полином $Q(x)$ дели полином $P(x)$, у ознаци $Q(x) \mid P(x)$.

Безуов став *Остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x - a$ једнак је $P(a)$.*

Ако је $P(a) = 0$, кажемо да је *a нула (корен)* полинома $P(x)$ и тада важи:
$$P(x) = Q(x)(x - a).$$

Дефиниција 1 Кажемо да је a нула полинома $P(x)$ *вишеструкости (реда)* k, $k \in \mathbb{N}$, ако и само ако $(x-a)^k \mid P(x)$ и $(x-a)^{k+1} \nmid P(x)$. Нуле вишеструкости 1 се називају *просте нуле.*

Важи следеће тврђење: x_0 је нула реда k полинома $P(x)$ акко

$$P(x_0) = P'(x_0) = \cdots = P^{(k-1)}(x_0) = 0\,, \quad P^{(k)}(x_0) \neq 0\,.$$

Полином $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, за $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, има n нула у пољу комплексних бројева[1] и тада важи:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

где су $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ нуле полинома $P(x)$.

Виетове формуле *Нека је $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, за $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, и нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуле полинома. Тада важе следеће једнакости:*

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n},\\
x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n},\\
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n},\\
&\vdots\\
x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

Теорема о рационалним нулама *Нека је $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Ако је p/q, за $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, и $\mathrm{NZD}(p, q) = 1$, нула полинома $P(x)$, тада $p \mid a_0$ и $q \mid a_n$.*

Теорема о комплексним нулама реалног полинома *Ако је $z = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ корен реда k полинома $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, онда је и $\overline{z} = \alpha - i\beta$, корен реда k полинома $P(x)$.*[2]

[1] Међу овим коренима може бити и једнаких. Ова особина позната је као алгебарска затвореност поља $\mathbb{C}$. Поље реалних бројева није алгебарски затворено, на пример полином $P(x) = x^2 + 1$ нема нула у пољу $\mathbb{R}$.

[2] Каже се још да се комплексне нуле реалних полинома појављују само у паровима.

Задатак 1 Дат је полином $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Одредити параметре $a, b \in \mathbb{R}$ такве да је полином $P(x)$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 - 1$.

Решење Уочимо да је $Q(x) = (x-1)(x+1)$. Да би полином $P(x)$ био дељив полиномом $Q(x)$, потребно је да $P(1) = 0 = P(-1)$, тј.

$$a + b + 2 = 0 \quad \text{и} \quad a - b = 0.$$

Решавањем претходног система добијамо да је $a = b = -1$. □

Задатак 2 Нека је $P(x) = nx^{n+1} - (1+np)x^n + (p-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x) + p$. Да ли је $P(x)$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 - (p+1)x + p$, где је $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{R}$?

Решење Уочимо да је $Q(x) = (x-1)(x-p)$.

- Претпоставимо најпре да је $p \neq 1$. Тада је

  $$\begin{aligned} P(1) &= n - (1+np) + (p-1)(n-1) + p = 0 \ \text{ и} \\ P(p) &= np^{n+1} - (1+np)p^n + (p-1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p) + p \\ &= np^{n+1} - p^n - np^{n+1} + p(p-1)(p^{n-2} + p^{n-3} + \cdots + 1) + p \\ &= -p^n + p(p^{n-1} - 1) + p = 0\,, \end{aligned}$$

  па у том случају $Q(x) \mid P(x)$.
- За $p = 1$ биће $Q(x) = (x-1)^2$ и $P(x) = nx^{n+1} - (1+n)x^n + 1$. Како је $x_0 = 1$ корен реда 2 полинома $Q(x)$, да би полином P био дељив полиномом Q, то $x_0 = 1$ мора бити корен реда бар два полинома $P(x)$. Стога ће бити довољно проверити да ли је испуњен услов $P(1) = P'(1) = 0$. Како је $P'(x) = n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1}$, директном заменом добијамо да су ове једнакости испуњене.

Стога, полином $Q(x)$ дели полином $P(x)$ за свако $p \in \mathbb{R}$. □

Задатак 3 Одредити остатак при дељењу полинома $P(x) = x^{2016} + x^{2015} + 1$ полиномом $Q(x) = x^3 - x^2 + x$.

Решење Очигледно је $Q(x) = x(x-1)(x+1)$. Нека је $S(x)$ количник, а $R(x)$ остатак при дељењу полинома P полиномом Q. Како је $\deg Q(x) = 3$, применом Теореме 1 закључујемо да је $\deg R(x) < 3$, па је полином R облика $R(x) = a + bx + cx^2$, за неке $a, b, c \in \mathbb{R}$. Тада:

$$x^{2016} + x^{2015} + 1 = (x^3 - x^2 + x)S(x) + cx^2 + bx + a\,.$$

Како је $P(-1) = 1 = P(0)$ и $P(1) = 3$, то важе следеће једнакости:

$$1 = c + b + a, \quad 1 = a \quad \text{и} \quad 1 = 9c + 3b + a.$$

Решавањем система добијамо да је $a = 1$, $b = 1/6$ и $c = -1/6$, те је тражени остатак једнак

$$R(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1\,.$$

□

Задатак 4 Нека је остатак приликом дељења полинома $P(x)$, степена већег од 2, полиномом $x - 1$ једнак -1, а полиномом $x + 1$ једнак 1. Одредити остатак приликом дељења полинома $P(x)$ полиномом $(x - 1)(x + 1)$.

Решење Нека је $S(x)$ количник, а $R(x)$ остатак приликом дељења полинома $P(x)$ полиномом $Q(x) = (x - 1)(x + 1)$. Како је $\deg Q(x) = 2$, применом Теореме 1 закључујемо да је $\deg R(x) < 2$, тј. $R(x) = a + bx$, за $a, b \in \mathbb{R}$. Тада:

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)S(x) + bx + a.$$

Како је $P(1) = -1$ и $P(-1) = 1$, то важе следеће једнакости:

$$-1 = b + a \quad \text{и} \quad 1 = -b + a.$$

Решење система је $a = 0$, $b = -1$, па је $R(x) = -x\,.$ □

Задатак 5 Наћи коефицијенте a, b, c и d полинома

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ако се зна да је збир његових нула једнак 2, производ једнак 1 и да полином $P(x)$ при дељењу са $x - 2$ даје остатак 2, а са $x + 1$ остатак -1.

Решење Нека су x_1, x_2, x_3 и x_4 нуле полинома $P(x)$. Применом услова задатка и Виетових формула за полином четвртог степена добијамо:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a \;\Rightarrow\; a = -1\,, \quad x_1x_2x_3x_4 = d \;\Rightarrow\; d = 1\,.$$

Како је $P(2) = 2$ и $P(-1) = -1$, важе и следеће једнакости:

$$16 + 8a + 4b + 2c + d = 2\,.$$

$$1 - a + b - c + d = -1\,.$$

Решавањем система добијамо $a = -2, b = -3/2, c = 13/2$, $d = 1$. □