Kristof Dreser

MATEMATIKA U SVAKODNEVNOM ŽIVOTU

Igre brojevima za sve životne situacije

Prevela s nemačkog
Dušica Milojković

Laguna

Naslov originala

Christoph Drösser
Der Mathematikverführer
Zahlenspiele für alle Lebenslagen

Kupovinom knjige sa FSC oznakom pomažete razvoj projekta
odgovornog korišćenja šumskih resursa širom sveta.
NC-COC-016937, NC-CW-016937, FSC-C007782
© 1996 Forest Stewardship Council A.C.

MATEMATIKA U SVAKODNEVNOM ŽIVOTU

Sadržaj

Ne bojte se velikih brojeva

ili

Šest Geteovih molekula

> *Matematika kao stručno područje toliko je ozbiljna da ne bi trebalo propustiti nijednu priliku da se učini zabavnijom.*
>
> Blez Paskal (1623–1662)

Kažu da su poslednje reči Johana Volfganga fon Getea bile: „Više svetlosti." Izrekavši to, veliki nemački pesnik zauvek je usnuo.

Geteov poslednji dah – bez sumnje dragocena stvar za sve obožavaoce velikog književnika (a možda i pomalo neukusna za neke druge). Gde se on, međutim, nalazi? Da li je u vazduhu koji danas i ovde udišemo ostao neki molekul koji je svojevremeno izdahnuo Gete? Možda čak i neki koji je izdahnuo upravo tim svojim poslednjim dahom? O takvom pitanju može mnogo da se filozofira. A može i da se izračuna. To skoro nikome ne pada na um – mada uopšte nije previše teško, samo ako znamo nekoliko osnovnih brojčanih vrednosti.

Neki se možda još iz škole sećaju jedinice zvane „mol". Mol neke materije je količina od $6 \cdot 10^{23}$ molekula. Dakle, 600.000.000.000.000.000.000.000 molekula. Takve jedinice su nam potrebne kad radimo s ovim majušnim gradivnim elementima materije.

Za sve vrste gasova važi: pri normalnom atmosferskom pritisku jedan mol gasa ima zapreminu od oko 25 litara. Jedan dah – recimo poslednji Geteov dah – ima otprilike zapreminu od jednog litra, dakle sadrži dvadeset peti deo mola, odnosno $2{,}4 \cdot 10^{22}$ molekula. U proseku udahnemo i izdahnemo oko 20 puta u minutu, što tokom 83 godine (koliko je Gete živeo) čini $20 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 83 =$ 872.496.000 udaha i izdaha – ili $2 \cdot 10^{31}$ molekula. (Tu je već sadržano jedno grubo uprošćavanje. Gete je mnoštvo molekula sigurno udahnuo i izdahnuo dva ili više puta, naročito noću, kad su prozori bili zatvoreni).

Može se poći od toga da se vazduh u našoj atmosferi od Geteove smrti veoma dobro izmešao i da zbog toga svaki litar vazduha sadrži otprilike podjednako Geteovih molekula. Koliko vazduha sadrži atmosfera? Negde sam pročitao da njena masa iznosi $5 \cdot 10^{21}$ grama. Mol vazduha teži oko 30 grama. To, dakle, čini $5 \cdot 10^{21} : 30 = 1{,}7 \cdot 10^{20}$ mola vazduha – to jest, nezamislivo veliki broj od 10^{44} molekula.

I tako smo prikupili sve brojke za konačni račun: broj svih molekula vazduha delimo sa brojem Geteovih molekula i dobijamo sledeće: Gete je nekad izdahnuo neki od $5 \cdot 10^{12}$ (ili pet biliona) molekula vazduha, a neki od $4 \cdot 10^{21}$ molekula bio je čak i u njegovom poslednjem dahu. Pošto svi, kao i Gete, sa svakim dahom udišemo $2{,}4 \cdot 10^{21}$ molekula, među njima se u proseku nalazi pet milijardi molekula koje je jednom, bilo kad, udahnuo Gete – i šest molekula iz daha kojim je pesnik ispustio dušu. U proseku. Na sličan način, uostalom, može da se izračuna i broj molekula u čaši vode koji su u nekom trenutku prošli kroz Geteovo telo.

Šest molekula iz Geteovog poslednjeg daha u svakom litru vazduha koji udišemo! Čovek odmah počne da diše sa više strahopoštovanja. Čitav ovaj račun je, doduše, prilična improvizacija. Pošao sam od vrlo grubih pretpostavki, a rezultat sam na svakom koraku velikodušno zaokruživao. Uopšte se, međutim, ne radi o tome. Pravo pitanje ovde se odnosi na red veličine: da li je prihvatljivo reći da neprestano udišemo Geteove molekule. Očigledno da jeste – bez obzira da li ih ima šest, dva ili dvadeset.

Ovo pitanje je, naravno, potpuno irelevantno, ali bavljenje takvim brojevima daje nam osećaj za redove veličina. A važno je da imamo taj osećaj, u najmanju ruku ako se radi o novcu: naime, uopšte nije svejedno da li ćemo potrošiti sto ili deset hiljada evra. U Nemačkoj smo jednom imali ministra ekonomije koji je na novinarevo pitanje koliko nula ima milijarda morao da nagađa: „O, gospode bože! Sedam? Osam?“ Ima ih devet, gospodine Bangemane*!

Naravno, svakome može da stane mozak ako se iznenada nađe pred mikrofonom ili televizijskom kamerom. Mora da mu se dopusti malo vremena za razmišljanje. Nažalost, opravdana je sumnja da mnogi političari to zaista ne znaju. A ipak svakodnevno odlučuju o sumama sa sedam, osam, ili devet nula.

Mada nas neprestano zasipaju vestima s izveštajima o iznosima koji se mere milijardama – tek izuzetno mali broj ljudi zaista ima osećaj kolika je milijarda. Psiholozi

---

* Martin Bangeman, savezni ministar privrede SRN od 1984. do 1988. (Prim. prev.)

su istraživali odnos ljudi prema novcu i ustanovili su da negde do 500.000 (tada se još radilo o nemačkim markama) još i imaju čulnu predstavu o visini iznosa (na pitanje šta za taj novac može da se kupi odgovarali su „kuća“), ali da nakon toga ovaj osećaj prestaje. Neki ministar se možda bori da ove godine dobije budžet od dvadeset jedne milijarde evra jer je prošle godine imao dvadeset milijardi evra – ali mirne duše možemo da posumnjamo da je stvarno u stanju da taj iznos zamisli.

Ali, mada veliki brojevi često prevazilaze ono što čulima možemo da shvatimo, ministri nisu jedini koji bi trebalo da vežbaju baratanje njima, i da njihovu prihvatljivost proveravaju tako što će ih uporediti s drugim, poznatim veličinama. Računanje s ovim brojevima je, zapravo, jednako jednostavno kao i računanje s manjim brojevima, što smo mogli da vidimo i na primeru s Geteom (pritom nam je od velike koristi bilo stepenovanje: više o tome može se naći u dodatku na str. 254).

Jedan primer na temu novca: pretpostavimo da Jozef Akerman*, predsednik *Dojče bank*, nemačke narodne banke, sedi za svojim kompjuterom i radi. U tom trenutku pred vratima kancelarije ugleda novčanicu od pet evra koju je neko izgubio. Da li se Akermanu isplati da ustane i da je podigne? Pritom pretpostavljamo da dok ne sedi za kompjuterom ne zarađuje novac (što je, naravno, besmislica). Pitanje je, dakle, zapravo: koliko dugo gospodin Akerman mora da radi da bi zaradio pet evra? Pre nego što izračunate, pokušajte da procenite!

---

* Jozef Akerman, od 2006. do 2012. predsednik izvršnog komiteta banke *Dojče bank* (Prim. prev)

Akerman je u 2006. zaradio oko dvanaest miliona evra. To je veoma mnogo. Njemu u prilog, pretpostavimo da je za ovu sumu radio šezdeset sati nedeljno i da nije išao na godišnji odmor. Ako je radio pedeset dve nedelje, dobijamo zaradu od 3.846 evra na sat. Zaokružimo ovu sumu još jednom, recimo na 3.600 evra. To znači da Jozef Akerman svake sekunde zaradi po jedan evro. Da bi mu se isplatilo da podigne novčanicu od pet evra, taj postupak ne bi trebalo da traje duže od pet sekundi. Gospodine direktore, požurite!

Evo još jednog poređenja koje pokazuje koliko naši lideri i privredni rukovodioci zarađuju: gospodin Akerman mora da radi 345 sekundi, ili tačno šest minuta, da bi zaradio prosečan iznos mesečne socijalne pomoći od 345 evra. Kada je već reč o socijalnoj pomoći: procenite koliko primalaca socijalne pomoći može da dobije ovaj prosečni iznos za cenu jednog lovačkog aviona jurofajter tajfun? 180, 1.800 ili 18.000?

Takav avion poreske obveznike košta sedamdeset pet miliona evra. Podeljeno prosečnim iznosom socijalne pomoći, puta dvanaest – to daje oko 18.000. A to je ukupan broj primalaca socijalne pomoći u gradu kao što je Bohum. Dobro, reći ćete, te stvari ne mogu da se upoređuju. Takav lovački avion mora da se ima. Ali Nemačka nije naručila jedan, već sto osamdeset ovakvih aviona.

Svakako da se može izneti politički argument da je ova računica demagoška i da tu poredimo babe i žabe, da su nam moderni lovački avioni neophodni za sopstvenu odbranu i da je njihova cena opravdana. Možda je i tako, ali računica je ipak tačna. A onaj ko se zalaže za ovakve investicije ne sme da iznosi samo kvalitativne argumente

(„to nam je potrebno jer…“) već bi trebalo da bude ubedljiv i u kvantitativnom pogledu: „Taj izdatak sebi možemo da priuštimo.“ A onda ipak moramo da se upustimo u izvesno poređenje baba i žaba jer se svaki evro može potrošiti samo jednom.

HRABROST ZA NEPRECIZNOST Zamislite još jedan primer, sledeću igru: neko je na rubu auto-puta između Hamburga i Berlina u zemlju zabio dva centimetra široku i dva metra visoku letvu. Negde između Hamburga i Berlina, nemate pojma gde. Vi vozite tim putem, noću, a kod sebe imate pištolj. U nekom proizvoljnom trenutku (koji slobodno možete da odaberete), otvarate prozor i pucate ka rubu puta. Jednom. Ako pogodite letvu, osvajate nagradu.

Da li biste u ovu igru uložili i jedan jedini evro, čak i ako dobitak, ukoliko pogodite, iznosi milion evra? Ne biste? Milioni ljudi, međutim, to svake nedelje čine kad ispunjavaju tiket za loto. Izgledi za dobitak na lotou su, naime, jednaki kao i izgledi strelca u noći da pogodi letvu koju smo gore opisali, naime oko jedan prema četrnaest miliona. Mnogo sreće na lotou!

Intuicija nam je veoma slaba i kad se radi o verovatnoći. Svoje izglede pogrešno procenjujemo u zavisnosti od toga kako je problem formulisan. Tu, naposletku, pomaže samo jedno: da izračunamo, makar i približno.

U školi se od nas očekivalo da računamo precizno. Na pitanje „koliko je $7 \cdot 14$?“ nije bilo dovoljno odgovoriti „otprilike 100!“ – nastavnica je htela da čuje tačno rešenje, naime 98. Za većinu praktičnih slučajeva, međutim, $7 \cdot 14$ je otprilike 100, broj π kojim izračunavamo obim kruga je 3 (umesto 3,14…, vidi str. 233), ubrzanje Zemlje iznosi

10 m/s² (umesto 9,81). Tačne vrednosti su neophodne samo ako se radi o stvarnoj preciznosti i finim razlikama. U sportu nas, recimo, ne zanima da li je neko pretrčao 100 metara za „otprilike 10 sekundi“ – 9,8 sekundi i 10,4 sekunde tu predstavlja razliku u čitavoj klasi. Nasuprot tome, prilikom računanja s redovima veličina preciznost je često samo prividna. Statističar Valter Kremer rado iznosi primer tabele iz jedne britanske publikacije, koja nabraja broj civilnih žrtava Drugog svetskog rata:

Civili		
Saveznici	Velika Britanija	60.595
	Belgija	90.000
	Kina	ogroman broj
	Danska	broj nepoznat
	Francuska	152.000
	Holandija	242.000
	Norveška	3.638
	SSSR	6.000.000
	Ukupno	6.548.233
Neprijatelji	Nemačka	500.000
	Austrija	125.000
	Italija	180.000
	Japan	600.000
	Poljska	5.300.000
	Ukupno	6.705.000

Potpuno besmislena je, sasvim prirodno, naročito prva tabela, jer se precizni brojevi (Norveška) u njoj mešaju s približnim (Belgija) ili čak nepoznatim.* Prilikom

* Autor je preuzeo ovu tabelu ne ulazeći u to koliko je tek neprecizan i proizvoljan spisak „saveznika“ i „neprijatelja“. (Prim. prev.)

takvog sabiranja uvek dobijamo neki naizgled egzaktan broj koji budi poverenje, ali je sasvim sigurno pogrešan. Dakle: imajte hrabrosti da budete neprecizni sve dok je red veličina tačan. A onda, s malo vežbe, ovladajte carstvom brojeva.

IZRAČUNAJTE Na Zemlji živi 6,5 milijardi ljudi. Ako bi se svi gusto zbili, kao na nekom rok koncertu, da li bi mogli da stanu na površinu veličine Bodenskog jezera? Najpre slobodno procenite, a zatim izračunajte! (Površina Bodenskog jezera iznosi 536 km^2).

Rešenje problema s kraja svakog poglavlja možete potražiti na *www.rowohlt.de/mathematikverfuehrer*