Вељко Папић
Предраг Тадић
Александра Марјановић

СИГНАЛИ И СИСТЕМИ
Збирка решених задатака

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
Електротехнички факултет
АКАДЕМСКА МИСАО
Београд, 2013.

Вељко Папић, Предраг Тадић, Александра Марјановић

СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

Збирка решених задатака

Рецензенти

Др Жељко Ђуровић, редовни професор
Универзитет у Београду

Др Душан Петровачки, професор емеритус
Универзитет у Новом Саду

Издавачи

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
Електротехнички факултет
АКАДЕМСКА МИСАО, Београд

Штампа

АКАДЕМСКА МИСАО, Београд

Тираж 300 примерака

ISBN 978-86-7466-453-7

Предговор

Књига *Сигнали и системи – Збирка решених задатака* настала је као резултат вишегодишњег рада аутора на припремању и извођењу рачунских вежби, и решавању испитних задатака из предмета Сигнали и системи на Електротехничком факултету у Београду. Концепција и садржај књиге у потпуности одговара наставном плану и програму овог предмета на Одсецима за сигнале и системе (ОС), рачунарску технику и информатику (ИР), телекомуникације и информационе технологије (ОТ), физичку електронику (ОФ) и енергетику (ОГ), и у целости се ослања на уџбеник *Сигнали и системи* аутора Бранка Ковачевића, Жељка Ђуровића и Срђана Станковића. Ова књига је превенствено намењена студентима поменутих профила на Електротехничком факултету у Београду, али с обзиром на суштински значај тема обрађених у овој књизи за области обраде сигнала и анализе система, може бити корисна и за студенте других техничких факултета.

Прва глава се бави основним континуалним сигналима, њиховим особинама, и операцијама над истим. Посебна пажња је посвећена особини периодичности континуалних сигнала, њиховом временском скалирању, инверзији и транслирању, и на крају израчунавању и особинама конволуције континуалних сигнала, која омогућава израчување одзива система на задату побуду. Друга глава је у потпуности аналогна првој, с тим што су овде предмет анализе дискретни сигнали, њихове особине и операције над њима.

Трећа глава се бави основним особинама континуалних и дискретних система, као што су линеарност, каузалност, стационарност, поседовање меморије, БИБО стабилност и инвертибилност. Посебна пажња је посвећена линеарним временски инваријантним системима, с обзиром на њихов значај у многим инжењерским дисциплинама, како у теорији, тако и у пракси.

Четврта и пета глава су посвећене фреквенцијској анализи периодичних и апериодичних сигнала са становишта Фуријеових редова и Фуријеове трансформације. Такође је описано како се ове технике могу користити у фреквенцијској анализи континуалних система, односно израчунавању амплитудске и фазне карактеристике, и за одређивање одзива континуалних система на задату побуду.

Шеста глава је посвећена анализи континуалних сигнала и система у комплексном домену, са становишта Лапласове трансформације. Посебна пажња је посвећена примени Лапласове трансформације за израчунавање одзива континуалних система. Такође су дате основе алгебре функција преноса. Слично томе, седма глава се бави применама зед трансформације, с тим што су сада предмет интересовања дискретни сигнали и системи.

Аутори дугују посебну захвалност студентима, који су били основни разлог за постојање ове збирке задатака и који су својим праћењем наставе, питањима и саветима највише утицали на методологију израде и изглед књиге, затим својим колегама на Катедри за сигнале и системе Електротехничког факултета у Београду на несебичној помоћи и корисним саветима, и на крају, рецензентима, проф. др Жељку Ђуровићу и проф. др Душану Петровачком, на низу корисних сугестија и савета.

Београд, Србија
Фебруар 2013

Вељко Папић
Предраг Тадић
Александра Марјановић

Садржај

1 Особине континуалних сигнала 1

2 Особине дискретних сигнала 31

3 Континуални и дискретни системи 69

4 Фуријеови редови 109

5 Фуријеова трансформација 125

6 Лапласова трансформација 155

7 Зед трансформација 185

1 Особине континуалних сигнала

Задатак 1.1

Одредити фундаменталну периоду и кружну учестаност за сваку од датих функција.

(а) $x(t) = 10\cos(20\pi t)$, (б) $x(t) = 10\cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$,
(в) $x(t) = \cos(20\pi t) + \sin(15\pi t)$, (г) $x(t) = t^2 + 10\cos(20\pi t)$,
(д) $x(t) = \cos\left(3\pi t - \frac{3\pi}{4}\right) + \sin(5\pi t) + \cos(7\pi t)$.

Решење.

(а) Периодични сигнали су они сигнали који задовољавају услов

$$x(t) = x(t+T), \text{ за } \forall t \text{ и } \exists T < \infty, \tag{1.1}$$

где најмања позитивна ненулта константа T представља основну, фундаменталну периоду сигнала. Вредност периоде се најчешће изражава у секундама $[s]$. Оваква дефиниција за основну периоду важи за сваки сигнал осим константног, код кога је претходни услов задовољен за сваку вредност константе T, па за њега основна периода није дефинисана. Основна кружна учестаност сигнала, ω_0,се може наћи из једнакости

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_0|}.$$

и изражава се у $[\mathrm{rad/s}]$. У претходном изразу стоји знак за апсолутну вредност, јер у општем случају кружна учестаност може бити негативна. Додатно, могуће је дефинисати и основну учестаност, тј. фреквенцију, f_0, сигнала која се изражава у $[\mathrm{Hz}]$ и задовољава једнакост $\omega_0 = 2\pi f_0$. Сигнали који не испуњавају услов периодичности су апериодични.

У конкретном случају основна учестаност сигнала је $\omega_0 = 20\pi \ \mathrm{rad/s}$, а основна периода је $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/(20\pi)\ \mathrm{s} = 0.1\ \mathrm{s}$.

(б) Слично примеру под (а) основна учестаност сигнала је $\omega_0 = 20\pi\,\mathrm{rad/s}$, а основна периода је $0.1\,\mathrm{s}$. Наиме, основна периода и учестаност не зависе од вредности фазе, која у овом случају износи $\pi/4$.

(в) У случају када је сигнал сложено-периодичан, основна периода и учестаност се рачунају по изразима

$$T_0 = \mathrm{NZS}\{T_1, T_2, \dots\}, \quad \omega_0 = \mathrm{NZD}\{\omega_1, \omega_2, \dots\}.$$

где T_i и ω_i, $i \geq 1$, представљају основне периоде и учестаности појединих компоненти. За дати сигнал то се своди на

$$\omega_0 = \mathrm{NZD}\{15\pi, 20\pi\} = 5\pi\,\mathrm{rad/sec}, \qquad T_0 = \frac{2\pi}{5\pi} = 0.4\,\mathrm{s}.$$

(г) За разлику од осталих случајева, овај сигнал је апериодичан, па није могуће одредити његову основну периоду и учестаност.

(д) На основу анализе из претходних примера, основна периода се рачуна као најмањи заједнички садржалац периода, а кружна учестаност као највећи заједнички делилац кружних учестаности појединих компоненти. Као што је раније наглашено вредност фазе не утиче на вредности периоде и кружне учестаности, па је коначно решење

$$\omega_0 = \mathrm{NZD}\{3\pi, 5\pi, 7\pi\} = \pi\,\mathrm{rad/s}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,\mathrm{s}.$$

Задатак 1.2

Нека је $x(t)$ периодичан сигнал са периодом T. Проверити периодичност следећих сигнала

(а) $y(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$, (б) $y(t) = e^{x(t)}$,

(в) $y(t) = x(t^2)$, (г) $\mathrm{y(t)} = x(2 - t/3)$.

Решење.

(а) Кренимо од претпоставке да је сигнал $y(t)$ периодичан. Да би то било испуњено, у складу са условом (1.1), мора постојати коначна константа T_Y за коју важи

$$y(t) = y(t + T_Y), \qquad \text{за } \forall t.$$

Израз за сигнал $y(t+T_Y)$ је

$$\begin{aligned} y(t+T_Y) &= \frac{1}{2}\Big(x(t+T_Y) - x\big(-(t+T_Y)\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big(x(t+T_Y) - x(-t-T_Y)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(x(t+T_Y) - x(-t+T_Y)\big). \end{aligned}$$

Са друге стране сигнал $y(t)$ се може другачије написати као

$$y(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big) = \frac{1}{2}\big(x(t+T) - x(-t+T)\big).$$

Упоређивањем последња два израза закључујемо да сигнал $y(t)$ јесте периодичан са периодом $T_Y = T$.

(б) Користећи поступак као у претходном случају, полазимо од претпоставке да сигнал $y(t)$ јесте периодичан.

Посматрајмо изразе

$$y(t) = e^{x(t)} = e^{x(t+T)} \quad \text{и} \quad y(t+T_Y) = e^{x(t+T_Y)}.$$

Следи да је и овакав сигнал периодичан, са периодом $T_Y = T$.

(в) Пођимо од израза за сигнал $y(t)$

$$y(t) = x(t^2) = x(t^2 + T).$$

Паралелно томе, израз за сигнал $y(t+T_Y)$ јесте

$$y(t+T_Y) = x((t+T_Y)^2) = x(t^2 + 2tT_Y + T_Y^2).$$

Како услов за периодичност сигнала мора бити испуњен за свако t, а изједначавањем последња два израза добија се вредност T_Y која зависи од t, сигнал $y(t)$ није периодичан.

(г) Анализирајмо израз за сигнал $y(t)$

$$y(t) = x\left(2 - \frac{t}{3}\right) = x\left(2 - \frac{t}{3} + T\right) = x\left(2 - \frac{t}{3} - T\right)$$

и сигнал $y(t+T_Y)$

$$y(t+T_Y) = x\left(2 - \frac{(t+T_Y)}{3}\right) = x\left(2 - \frac{t}{3} - \frac{T_Y}{3}\right).$$

Упоређивање горњих израза се показује да сигнал $y(t)$ јесте периодичан, са периодом $T_Y = 3T$. Другим речима, оваква трансформација временске промењливе "успорила" је дати сигнал 3 пута.

Задатак 1.3

Дати су сигнали $x_1(t)$ и $x_2(t)$ као:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & \sin(20\pi t) \geq 0 \\ -1, & \sin(20\pi t) < 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} t, & \sin(20\pi t) \geq 0 \\ -t, & \sin(20\pi t) < 0 \end{cases}$$

Одредити и скицирати производ ових сигнала, $x(t) = x_1(t)x_2(t)$ на опсегу $-0.5 \leq t \leq 0.5$.

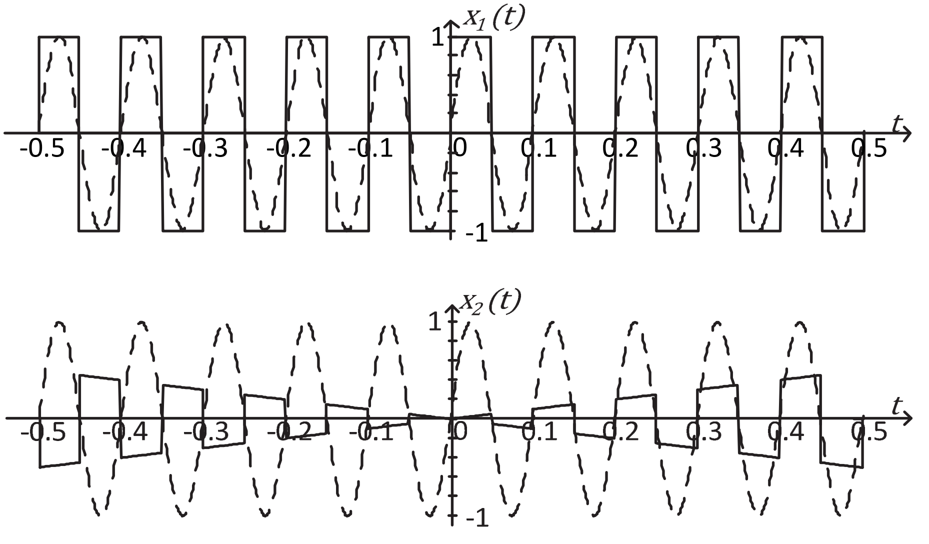
Решење.

Задати сигнали $x_1(t)$ и $x_2(t)$ зависе од знака функције $y(t) = \sin\,(20\pi t)$ која је периодична са основном учестаношћу $\omega_0 = 20\pi\ \mathrm{rad/s}$, тј. периодом $T = 2\pi/\omega_0 = 0.1\ \mathrm{s}$ (слика 1.1). У циљу поједностављивања датих израза, извршићемо најпре анализу знака функције $y(t)$. Имамо да за $k = 0, \pm 1, \ldots$ важи

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \sin(20\pi t) \geq 0 \Leftrightarrow t \in \left[kT, \left(k + \frac{1}{2}\right)T\right] \\ -1, & \sin(20\pi t) < 0 \Leftrightarrow t \in \left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T, (k+1)T\right) \end{cases}.$$

Даље се сигнали $x_1(t)$ и $x_2(t)$ могу приказати у еквивалентној форми

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[kT, \left(k + \frac{1}{2}\right)T\right] \\ -1, & t \in \left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T, (k+1)T\right) \end{cases}$$



Слика 1.1. Сигнали $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

$$x_2(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[kT, \left(k+\frac{1}{2}\right)T\right] \\ -t, & t \in \left(\left(k+\frac{1}{2}\right)T, (k+1)T\right) \end{cases}$$

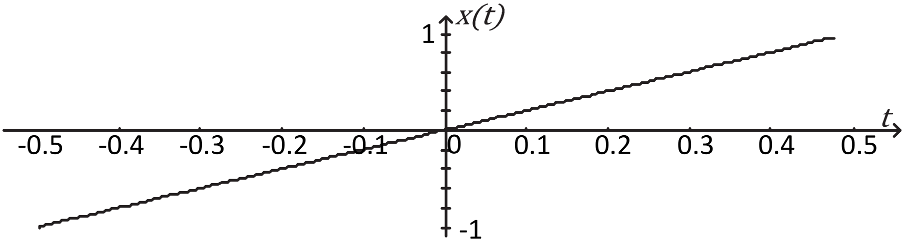
Тражени производ сигнала $x(t) = x_1(t)x_2(t)$ једнак је

$$x(t) = \begin{cases} 1 \cdot t = t, & t \in \left[kT, \left(k+\frac{1}{2}\right)T\right] \\ (-1)\cdot(-t) = t, & t \in \left(\left(k+\frac{1}{2}\right)T, (k+1)T\right) \end{cases}$$

што се коначно своди на израз

$$x(t) = x_1(t)x_2(t) = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Графички приказ сигнала $x(t)$ дат је на слици 1.2.



Слика 1.2. Производ сигнала $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Задатак 1.4

Скицирати следеће сигнале:

(а) $x(t) = -3u(t-2)$ и $x'(t)$, (б) $x(t) = u(t) - 2u(t-2)$ и $x'(t)$,

(в) $x(t) = t[u(t+1) - u(t-1)]$ и $x'(t)$, (г) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$,

(д) $x(t) = \mathrm{e}^{-bt}[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)]u(t+\varepsilon), b > 0, 0 < \varepsilon < T$.

Решење.

(а) У решавању следећих проблема користићемо се везом која постоји између јединичне импулсне и јединичне одскочне функције

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau.$$

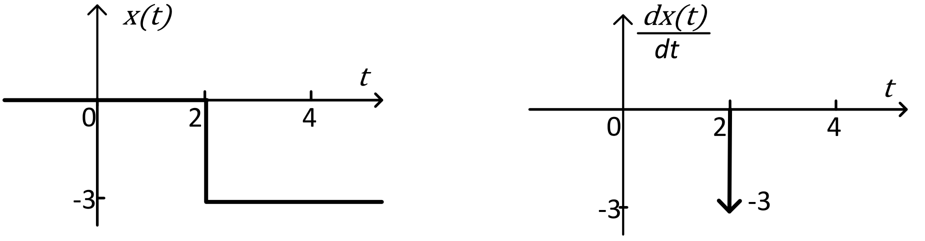
На основу прве релације јасно се види да је извод датог сигнала $x(t)$ једнак

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\big(-3u(t-2)\big) = -3\frac{d}{dt}u(t-2) = -3\delta(t-2).$$

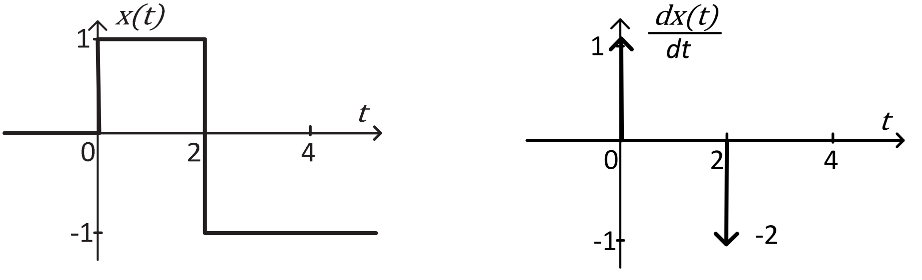
Добијени сигнал приказан је на слици 1.3.

(б) Слично претходном случају, задати сигнал се састоји из три константна дела, за $t < 0$ има вредност 0, на интервалу $t \in (0,2)$ је једнак 1, а за $t > 2$ износи -1. Како је извод константе једнак нули, то ће и вредност траженог сигнала $x'(t)$ бити једнака нули на датим интервалима. Остало је да се прокоментарише вредност $x'(t)$ у прелазним тачкама између интервала, која ће да износи $\delta(t)$, односно $-2\delta(t-2)$. Коначан резултат је приказан на слици 1.4.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t) - 2\delta(t-2)$$



Слика 1.3. Сигнали $x(t)$ *и* $\frac{dx(t)}{dt}$.



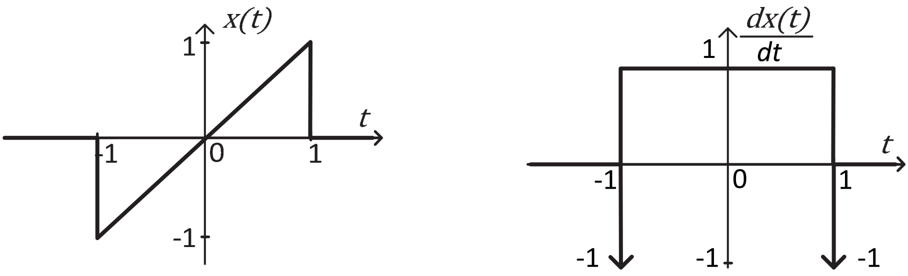
Слика 1.4. Сигнали $x(t)$ и $\frac{dx(t)}{dt}$.

(в) Сигнал $x(t)$ је представљен линеарном функцијом јединичног нагиба на сегменту $(-1,1)$, док ван њега има вредност нула. На основу резоновања из претходне тачке закључује се да је његов извод једнак нули ван назначеног интервала, тј. једнак константи $K = 1$ унутар граница задатог интервала. Као резултат прекида у тачкама $t = -1$ и $t = 1$, у резултату се појављују и два Диракова импулса (слика 1.5).

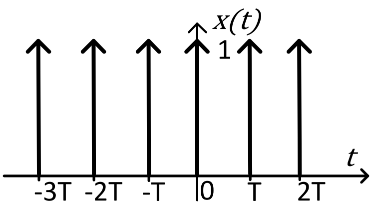
$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(t[u(t+1) - u(t-1)]) \\ &= 1 \cdot [u(t+1) - u(t-1)] + t\frac{d}{dt}([u(t+1) - u(t-1)]) \\ &= u(t+1) - u(t-1) + t\big(\delta(t+1) - \delta(t-1)\big) \\ &= u(t+1) - u(t-1) - \delta(t+1) - \delta(t-1).\end{aligned}$$

(г) Сигнал $x(t)$ се назива поворком Диракових импулса. Множење континуалног сигнала оваквом поворком импулса представља операцију одабирања сигнала (слика 1.6).

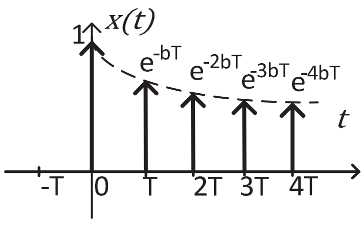
(д) Као што је већ поменуто, множењем континуалне функције са поворком импулса одабирају се само вредности датог сигнала у тренуцима $t = kT$. Додатно, множењем са датом одскочном функцијом, обезбеђује се да сигнал буде једнак нули за $t < -\varepsilon$, што се у овом случају своди на каузалан сигнал, јер је $0 < \varepsilon < T$. Тражени сигнал је приказан на слици 1.7.



Слика 1.5. Сигнали $x(t)$ и $\frac{dx(t)}{dt}$.



Слика 1.6. Сигнал $x(t)$.



Слика 1.7. Сигнал $x(t)$.

Задатак 1.5

Израчунати и скицирати интеграл $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ следећих сигнала:

(а) $x(t)=3\delta(t-2)$, (б) $x(t)=\delta(t)-2\delta(t-2)$,

(в) $x(t)=\delta(t+\pi)-\delta(t-\pi)$, (г) $x(t)=u(t)-1.5u(t-1)+0.5u(t-2)$,

(д) $x(t)=t[u(t)-u(t-1)]+(2-t)\,[u(t-1)-u(t-2)]$.

Решење.

(а) Користећи другу релацију која повезује јединичну импулсну и јединичну одскочну функцију добија се да је

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=3u(t-2).$$

Покажимо да је заиста тако:

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}3\delta(\tau-2)d\tau=3\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-2)d\tau=3,\ \text{ за }\ t>2.$$

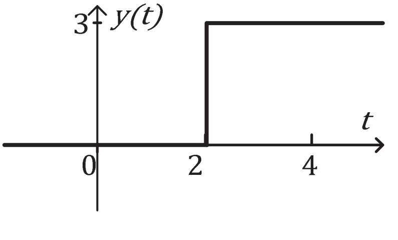
Добијени сигнал, приказан на слици 1.8, дат је са

$$y(t)=3u(t-2).$$

(б) Усвајањем сигнала $x(t)$ као подинтегралне функције добија се

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\big(\delta(\tau)-2\delta(\tau-2)\big)d\tau.$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\begin{cases}0, & t<0\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=1, & t\in(0,2)\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0^+}\delta(\tau)d\tau-2\int_{2^-}^{t}\delta(\tau-2)d\tau=-1, & t>2\end{cases}$$



Слика 1.8. Сигнал $y(t)$.