Miloš Miličić

MATEMATIČKA ANALIZA

Akademska misao
Beograd, 2012

Dr Miloš Miličić
redovni profesor
Državnog univerziteta u Novom Pazaru

MATEMATIČKA ANALIZA

Recenzenti
Dr Ćemal Dolićanin
redovni profesor i rektor Državnog univerziteta u Novom Pazaru

Dr Miloš Čanak
redovni profesor Univerziteta u Beogradu i Državnog univerziteta u Novom Pazaru

SADRŽAJ

PREDGOVOR

U ovoj knjizi obrađeni su osnovni pojmovi matematičke analize koji se, u okviru matematičkih kurseva, izučavaju na prirodno-matematičkim, računarsko–informatičkim, tehničkim i drugim fakultetima, kao i na nekim visokim školama strukovnih studija. Knjiga je zamišljena kao udžbenik za studente ovih fakulteta, pa su i koncepcija i način obrade materije prilagođeni, pre svega, njenim budućim korisnicima. U tu svrhu, dat je veliki broj grafičkih ilustracija, primera i rešenih zadataka.

Materija u knjizi podeljena je u deset poglavlja. U pripremi i obradi sedmog, osmog i devetog poglavlja autoru je značajno pomogla dr Nada Miličić, redovni profesor Tehnološko-metalurškog fakulteta u Beogradu.

Recenzenti dr Ćemal Dolićanin, rektor Državnog univerziteta u Novom Pazaru i dr Miloš Čanak, redovni profesor Univerziteta u Beogradu i Državnog univerziteta u Novom Pazaru svojim sugestijama znatno su doprineli kvalitetu knjige. Autor im toplo zahvaljuje.

U Beogradu, 10. 01. 2012. Autor

I POGLAVLJE

POLJE REALNIH BROJEVA

1. ISTORIJSKI PREGLED RAZVOJA POJMA REALNOG BROJA

Jedan od najvažnijih pojmova u matematici je pojam realnog broja. Istorijski razvoj pojma realnog broja ide od prirodnih, preko celih i racionalnih do iracionalnih brojeva. Možemo smatrati da su prirodni brojevi: 1, 2, 3, 4, 5, ... nastali sa nastankom čoveka. Skup prirodnih brojeva se označava sa N, dakle, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. U skupu prirodnih brojeva definisane su dve binarne operacije: *sabiranje* i *množenje*, tj. ako su $m, n \in N$, tada je i $m + n \in N$ i $m \cdot n \in N$. Za sabiranje i množenje prirodnih brojeva važe zakoni asocijacije i komutacije, kao i zakon distribucije množenja u odnosu na sabiranje. Skup prirodnih brojeva je potpuno uređen po veličini relacijom $\leq$ (manje ili jednako): $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots$ U tom uređenju, broj 1 je minimum skupa N, dok maksimum ne postoji. Svaki broj ima svog neposrednog *sledbenika*, a svaki broj, različit od 1, svog neposrednog *prethodnika*. Ako je n prirodni broj različit od 1, tada je $n - 1$ njegov neposredni prethodnik, a $n + 1$ njegov neposredni sledbenik. Za brojeve $n - 1$ i n, odnosno n i $n + 1$ kaže se da su *uzastopni* prirodni brojevi. Između dva prirodna broja n i $n + (k + 1)$, gde je $k \in N$, nalazi se k prirodnih brojeva.

Međutim, ako se zna zbir m dva prirodna broja i jedan od sabiraka, recimo n, tada nepoznati sabirak x možemo odrediti samo u slučaju kad je $m > n$. Drugim rečima, jednačina $x + n = m$ ima rešenje u skupu prirodnih brojeva samo u slučaju kad je $m > n$. Zahtev da jednačina $n + x = m$ ima rešenje za proizvoljne $m, n \in N$ dovodi do proširenja skupa prirodnih brojeva u skup celih brojeva. Broj nula dobijamo kao rešenje jednačine $x + 1 = 1$, ili bilo koje jednačine $x + n = n$ $(n \in N)$. Broj -1 dobijamo kao rešenje jednačina $x + 1 = 0$, ili bilo koje jednačine $x + (n + 1) = n$ $(n \in N)$. Uopšte, broj $-n$ dobijamo kao rešenje jednačine $x + n = 0$, ili bilo koje jednačine $x + (n + m) = m$ $(m, n \in N)$. Skup celih brojeva ćemo označavati sa Z (upotrebljavaju se još i oznake D i E). Dakle, $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Za sabiranje i množenje celih brojeva važe zakoni asocijacije i komutacije, kao i zakon distribucije množenja u odnosu na sabiranje. U skupu Z se definiše i binarna operacija *oduzimanje*, tj. *razlika* dva cela broja. Razlika celih brojeva m i n je broj k, takav da je $n + k = m$. Pišemo $k = m - n$, jasno $m - n = m + (-n)$. Skup Z je potpuno uređen po veličini relacijom $\leq$: $\dots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \dots$. U ovakvom uređenju ne postoji ni maksimum ni minimum skupa Z; svaki broj ima svog neposrednog prethodnika i neposrednog sledbenika, između svaka dva neuzastopna cela broja postoji konačno mnogo celih brojeva.

Međutim, jednačina $2x = 1$ u skupu celih brojeva nema rešenja, tj. u skupu Z ne postoji broj x, takav da je proizvod broja 2 i broja x jednak 1. Zahtev da ova jednačina, kao i sve jednačine oblika $qx = p$, gde $p, q \in Z$ i $q \neq 0$, imaju rešenje, dovodi do proširenja skupa celih brojeva u skup racionalnih brojeva ili razlomaka. Rešenje jednačine $qx = p$ izražavamo u obliku $x = pq^{-1}$. Ovim je definisana binarna operacija *deljenje*, s jednim izuzetkom da se ne može deliti nulom. Količnik brojeva p i q je broj kojim treba pomnožiti broj q da bi se dobio broj p. Označavamo ga sa $p : q$ ili $\dfrac{p}{q}$, a to je, u stvari, $p \cdot q^{-1}$ $(q \neq 0)$. Racionalan broj je svaki broj oblika $\dfrac{p}{q}$, gde $p, q \in Z$ i $q \neq 0$. Skup racionalnih brojeva ćemo označavati sa Q. Dakle,

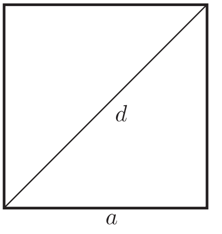
$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| (p, q \in Z) \wedge (q \neq 0) \right\}.$$

Napomenimo da bez ograničenja možemo pretpostaviti da je $q > 0$. Za sabiranje i množenje racionalnih brojeva važe zakoni asocijacije i komutacije, kao i zakon distribucije množenja u odnosu na sabiranje. U skupu $Q \setminus \{0\}$ deljenje je takođe binarna operacija.

Skup racionalnih brojeva potpuno je uređen relacijom $\leq$, tj. za svaka dva racionalna broja a i b važi jedan od sledeća tri odnosa: $a < b$, $a = b$ ili $a > b$. Između dva ma koja racionalna broja a i b postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Naime, ako je $a < b$, tada je broj $c = \dfrac{a+b}{2}$ između brojeva a i b. Isto tako, broj $c_1 = \dfrac{a+c}{2}$ je između brojeva a i c i broj $c_2 = \dfrac{c+b}{2}$ između c i b, tj. $a < c_1 < c < c_2 < b$. Ovaj postupak se može nastaviti i po svojoj prirodi je takav da mu nema kraja, što upravo i znači da između svaka dva racionalna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Zato kažemo da je skup racionalnih brojeva *svuda gust*.

Ako je $r \in Q$ i $m \in Z$, tada je $r^m \in Q$, ali ako $r, m \in Q$, tada r^m ne mora biti racionalan broj. Na primer, $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = \dfrac{64}{125}$ je racionalan broj, dok $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ nije racionalan broj. Pre nego što dokažemo da broj čiji je kvadrat 2 (a koji označavamo sa $\sqrt{2}$) nije racionalan, odnosno da jednačina $x^2 = 2$ nema rešenja u skupu racionalnih brojeva, napomenimo da su u Staroj Grčkoj brojevima davali geometrijski smisao, jer su oni dovođeni u vezu s merenjem veličina. Izmeriti neku veličinu znači uporediti je sa jedinicom mere te veličine, tj. naći koliko se puta jedinica mere sadrži u veličini koja se meri. Na ovaj način se merenoj veličini pridružuje merni broj.

Međutim, sledeći jednostavan primer merenja duži pokazuje da se svakoj duži ne može pridružiti merni broj koji bi bio racionalan. Naime, još su u Staroj Grčkoj pripadnici poznate Pitagorejske[2)] škole (u V i IV veku pre nove ere) znali da su stranica a i dijagonala d kvadrata nesamerljive duži, tj. da je nemoguće naći duž koja bi se ceo broj puta sadržavala i u stranici i u dijagonali kvadrata. Ovo je u vezi sa činjenicom da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Naime, ako bi postojala duž c koja se q puta sadrži u a i p puta u d, gde su p i q celi brojevi, tada bi bilo $a = qc$ i $d = pc$. Kako je, prema Pitagorinoj teoremi, $d = a\sqrt{2}$, dalje bi bilo $pc = qc\sqrt{2}$, tj. $p = q\sqrt{2}$ ili $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, što bi značilo da je $\sqrt{2}$ racionalan broj.



sl. 1

Dokažimo, međutim, da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj, tj. da se ne može predstaviti u obliku $\dfrac{p}{q}$, gde su p i q celi brojevi. Dokaz koji navodimo potiče od Euklida.[3)] Pretpostavimo suprotno, da je $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi, tj. NZD $(p, q) = 1$. Ova pretpostavka je bitna i ona se uvek može učiniti, jer ako p i q nisu uzajamno prosti, razlomak $\dfrac{p}{q}$ se može skratiti. Dalje sledi $p = q\sqrt{2}$, tj. $p^2 = 2q^2$, što znači da je p^2, a samim tim i p, deljivo sa 2. Dakle, $p = 2m$, gde $m \in Z$, pa poslednja jednakost daje $4m^2 = 2q^2$, tj. $q^2 = 2m^2$, što znači da je i q^2, a samim tim i q, deljivo sa 2. Dobili smo da je 2 zajednički činilac brojeva p i q, što je suprotno pretpostavci da su p i q uzajamno prosti. Ovim smo dokazali da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Broj $\sqrt{2}$ je *iracionalan.*

Saznanje da odnos dijagonale i stranice kvadrata nije racionalan broj i da se, u skladu sa tim, na primer, dijagonali jediničnog kvadrata ne može pridružiti merni broj koji bi bio racionalan, jeste prvi susret sa iracionalnim brojevima. To saznanje je unelo zabunu među matematičare, jer je teško bilo prihvatiti da se posve određenoj duži, kakva je dijagonala kvadrata, ne može pridružiti merni broj. Pojam iracionalnog broja biće precizno definisan tek dve hiljade godina kasnije, a zasluge za to pripadaju znamenitim

[2)]Pitagora (580–500. god. pre nove ere) starogrčki matematičar.
[3)]Euklid (365?–275? god. pre nove ere), starogrčki matematičar.

matematičarima XIX veka - Dedekindu[4)], Kantoru[5)] i Vajerštrasu.[6)] O nekim Dedekindovim i Kantorovim rezultatima u tom smislu biće reči kasnije u okviru aksiomatske metode izučavanja realnih brojeva.

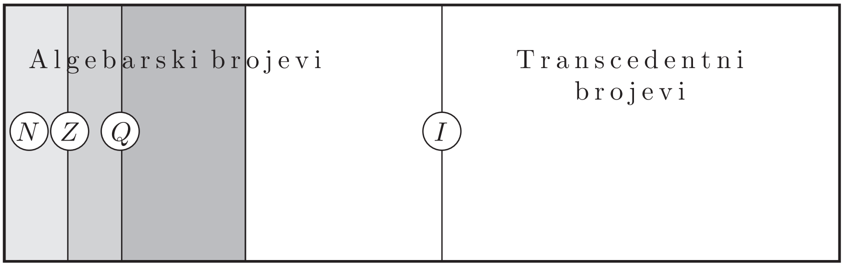
Dakle, pored racionalnih, postoje i iracionalni brojevi. Možemo reći da je broj iracionalan ako se ne može predstaviti u obliku $\frac{p}{q}$, gde $p, q \in Z$ i $q \neq 0$. Skup iracionalnih brojeva ćemo označavati sa I.

Definicija 1. Jednačina oblika

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

gde su koeficijenti a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ celi brojevi, $a_0 \neq 0$ i $n \in N$, je algebarska jednačina n-tog stepena.

Definicija 2. Broj koji predstavlja rešenje algebarske jednačine naziva se *algebarski broj*.



s;. 2

Svi racionalni brojevi su algebarski, jer su rešenja algebarske jednačine prvog stepena $a_0x + a_1 = 0$, $a_0, a_1 \in Z$ i $a_0 \neq 0$. Broj $\sqrt{2}$ je takođe algebarski, jer zadovoljava jednačinu $x^2 - 2 = 0$. Nije teško pokazati da su algebarski iracionalni brojevi: $\sqrt{3}$, $2\sqrt[3]{5}$, $3 + 5\sqrt[4]{7}$ itd. Međutim, postoje iracionalni brojevi koji nisu algebarski, to su *transcedentni* iracionalni brojevi. Brojevi: π, e, $\log_2 5$ itd. su transcedentni iracionalni brojevi.

Unija skupa racionalnih i skupa iracionalnih brojeva je skup realnih brojeva. Uobičajena oznaka za skup realnih brojeva je R. Dakle, $R = Q \cup I$.

Pregled prirodnih, celih, racionalnih, iracionalnih, algebarskih i transcedentnih brojeva dat je na sl. 2.

2. AKSIOME SKUPA REALNIH BROJEVA

Koristeći sve rezultate o svojstvima realnih brojeva do kojih su došli matematičari, moguće je teoriju realnih brojeva zasnovati aksiomatski, tj.

[4)]Richard Dedekind (1831–1916), nemački matematičar.
[5)]Georg Cantor (1845–1918), nemački matematičar.
[6)]Karl Weierstrass (1815–1897), nemački matematičar.

poći od osnovnih pojmova i polaznih tvrđenja (aksioma), a zatim definisati nove pojmove i izvoditi razna svojstva na osnovu polaznih i već dokazanih tvrđenja.

Definicija 3. Skup realnih brojeva je neprazan skup R u kome su definisane dve binarne operacije: sabiranje $(+)$ i množenje $(\cdot)$ i binarna relacija $\leq$ (manje ili jednako), tako da su ispunjena sledeća svojstva:

I 1° $(\forall a, b, c \in R)$ $((a+b)+c = a+(b+c))$ – sabiranje je asocijativna operacija,

2° $(\exists 0 \in R)$ $(\forall a \in R)$ $(a+0 = 0+a = a)$ – 0 (nula) je neutralni element za sabiranje,

3° $(\forall a \in R)$ $(\exists (-a) \in R)$ $(a+(-a) = (-a)+a = 0)$ – element $-a$ je suprotni elementu a u odnosu na sabiranje,

4° $(\forall a, b \in R)$ $(a+b = b+a)$ – sabiranje je komutativna operacija,

5° $(\forall a, b, c \in R)$ $((ab)c = a(bc))$ – množenje je asocijativna operacija,

6° $(\exists 1 \in R)$ $(\forall a \in R)$ $(a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$ – 1 (jedinica) je neutralni element za množenje,

7° $(\forall a \in R \setminus \{0\})$ $(\exists a^{-1} \in R)$ $(a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1)$ – element a^{-1} je inverzni elementu a $(a \neq 0)$ u odnosu na množenje,

8° $(\forall a, b \in R)$ $(ab = ba)$ – množenje je komutativna operacija,

9° $(\forall a, b, c \in R)$ $((a+b) \cdot c = ac + bc \;\&\; c \cdot (a+b) = ca + cb)$ – množenje je distributivno u odnosu na sabiranje;

II 10° $(\forall a \in R)$ $(a \leq a)$ – relacija $\leq$ je refleksivna,

11° $(\forall a, b \in R)$ $(a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b)$ – relacija $\leq$ je antisimetrična,

12° $(\forall a, b, c \in R)$ $(a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c)$ – relacija $\leq$ je tranzitivna,

13° $(\forall a, b \in R)$ $(a \leq b \vee b \leq a)$ – svaka dva elementa iz R su uporediva,

14° $(\forall a, b, c \in R)$ $(a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c)$ – relacija $\leq$ je saglasna sa sabiranjem,

15° $(\forall a, b \in R)$ $(0 \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b)$ – relacija $\leq$ je saglasna sa množenjem.

III 16° Ako su A i B neprazni podskupovi od R, takvi da je $(\forall a \in A)$ $(\forall b \in B)$ $(a \leq b)$, tada postoji element $c \in R$, takav da je $(\forall a \in A)$ $(\forall b \in B)$ $(a \leq c \leq b)$ – svojstvo *neprekidnosti* (*potpunosti*) skupa R.

Navedena tvrđenja, koja uzimamo kao tačna, nazivaju se *aksiome* skupa realnih brojeva i, kao što se vidi, podeljene su u tri grupe.

Iz aksioma I grupe sledi da skup R u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$ ima *algebarsku strukturu polja.* Iz aksioma II grupe sledi da je skup R *potpuno uređen relacijom* $\leq$, kao i saglasnost te relacije sa operacijama sabiranja i množenja. Najzad, u R važi aksioma 16° III grupe, koja se naziva *aksioma neprekidnosti* ili *aksioma potpunosti.* S obzirom na navedena svojstva, kaže se da je skup realnih brojeva *potpuno uređeno polje.*

Sva ostala, nama manje ili više poznata, svojstva realnih brojeva mogu se izvesti iz navedenih aksioma.

Pre svega, u skupu R definišu se operacije oduzimanja i deljenja.

Definicija 4. *Razlika* realnih brojeva a i b, u oznaci $a-b$, je zbir broja a i broja $-b$, tj.

$$a - b = a + (-b).$$

Lako je videti da je razlika brojeva a i b broj koji treba sabrati sa b da bi se dobio broj a.

Definicija 5. Količnik realnih brojeva a i b, gde je $b \neq 0$, u oznaci $\frac{a}{b}$ ili $a : b$, je proizvod broja a i broja b^{-1}, tj.

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}$$

Istaknimo sada neke osobine realnih brojeva.

Tvrđenje 1. (a) Neutralni element u odnosu na sabiranje u R (broj nula) je jedinstven;

(b) Svaki element $a \in R$ ima jedinstven suprotni element $-a$ u R;

(c) $-(-a) = a$ za svako $a \in R$;

(d) $-(a + b) = (-a) + (-b)$ za sve $a, b \in R$;

(e) Jednačine $a + x = b$ i $y + a = b$ imaju jedinstvena rešenja u R;

(f) Važe zakoni skraćivanja sleva i zdesna, tj.

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c \quad \text{i} \quad b + a = c + a \Rightarrow b = c;$$

(g) $a + a = a \Rightarrow a = 0$;

(a') Neutralni (jedinični) element u odnosu na množenje u R (broj 1) je jedinstven;

(b') Svaki element $a \in R \setminus \{0\}$ ima jedinstveni inverzni element a^{-1} u $R \setminus \{0\}$;

(c') $(a^{-1})^{-1} = a$ za svako $a \in R \setminus \{0\}$;

(d') $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ za sve $a, b \in R \setminus \{0\}$;

(e') Jednačine $ax = b$ i $ya = b$ $(a \in R \setminus \{0\},\ b \in R)$ imaju jedinstvena rešenja u R.

(f') Važe zakoni skraćivanja sleva i zdesna, tj.

$$(ab = ac \wedge a \neq 0) \Rightarrow b = c \quad \text{i} \quad (ba = ca \wedge a \neq 0) \Rightarrow b = c.$$

(g') $(aa = a \wedge a \neq 0) \Rightarrow a = 1$.

Dokaz. (a) Ako bi bila dva neutralna elementa, tj. dve nule 0 i 0_1, tada bi bilo $0 + 0_1 = 0_1 + 0 = 0_1$ (zbog toga što je 0 neutralni element) i

$0 + 0_1 = 0_1 + 0 = 0$ (zbog toga što je 0_1 neutralni element), pa sledi da je $0 = 0_1$.

(b) Pretpostavimo da element a ima dva suprotna elementa a' i a'', tj. $a + a' = a' + a = 0$ i $a + a'' = a'' + a = 0$. Tada je $a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a''$.

(c) $-(-a) = -(-a) + 0 = -(-a) + (-a + a) = (-(-a) + (-a)) + a = 0 + a = a$.

(d) $((-a) + (-b)) + (a + b) = -b + (-a + a) + b = -b + 0 + b = -b + b = 0 \Rightarrow -(a + b) = (-a) + (-b)$.

(e) $a + x = b \Rightarrow -a + (a + x) = -a + b \Rightarrow (-a + a) + x = -a + b \Rightarrow 0 + x = -a + b \Rightarrow x = -a + b = b - a$, dakle, $x = b - a$ je rešenje jednačine $a + x = b$. Ako bi i x_1 bilo rešenje jednačine, tj. $a + x_1 = b$, tada bi bilo $x_1 = 0 + x_1 = (-a + a) + x_1 = -a + (a + x_1) = -a + b = b - a = x$.

Na isti način se pokazuje da jednačina $y + a = b$ ima jedinstveno rešenje $y = b + (-a) = b - a$.

(f) $a + b = a + c \Rightarrow -a + (a + b) = -a + (a + c) \Rightarrow (-a + a) + b = (-a + a) + c \Rightarrow 0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c$.

Druga formula sledi iz dokazane na osnovu komutativnosti sabiranja.

(g) $x + x = x \Rightarrow -x + (x + x) = -x + x \Rightarrow (-x + x) + x = -x + x \Rightarrow 0 + x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Na potpuno isti način dokazuju se svojstva (a')-(g').

Tvrđenje 2. U skupu R važi

(a) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ za svako $a \in R$,

(b) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ $(a, b \in R)$,

(c) $(-a)(-b) = ab$ $(a, b \in R)$,

(d) $(a - b)c = ac - bc$ & $c(a - b) = ca - cb$ $(a, b, c \in R)$.

Dokaz. (a) Iz $0 + 0 = 0$ sledi $a(0 + 0) = a \cdot 0$, tj. $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$, odnosno $a \cdot 0 = 0$. Jednakost $0 \cdot a = 0$ sledi iz dokazane jednakosti na osnovu komutativnosti množenja.

Dodajmo ovome da je $ab = 0$ *akko* $a = 0$ ili $b = 0$. Naime, ako je $ab = 0$ i $a \neq 0$, tada je $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$, tj. $(a^{-1}a)b = 0$, odnosno $1 \cdot b = 0$, dakle $b = 0$. Na isti način, iz $ab = 0$ i $b \neq 0$ sledi $a = 0$.

(b) $0 = 0 \cdot b = (a + (-a))b = ab + (-a)b \Rightarrow (-a)b = -(ab)$.

Na isti način se dokazuje druga jednakost.

(c) Na osnovu (b) je $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$.

(d) $(a - b)c = (a + (-b)c = ac + (-b)c = ac - bc$.

Druga formula sledi iz dokazane na osnovu komutativnosti množenja.

Iz aksiome 13° sledi da za svaki realan broj a važi: $a \geq 0$ ili $a \leq 0$, tj. $a > 0$ ili $a = 0$ ili $a < 0$. Ako je $a > 0$, za broj a kažemo da je *pozitivan*, a ako je $a < 0$, da je *negativan*. Ako sa R_+ označimo skup pozitivnih, a sa R_- skup negativnih realnih brojeva, tada je $R = R_- \cup \{0\} \cup R_+$.

Tvrđenje 3.

(a) $a \geq 0 \Longleftrightarrow -a \leq 0$;

(b) $a \leq b \Longleftrightarrow -b \leq -a$;

(c) $a < b \Longleftrightarrow a - b < 0$.

Dokaz. (a) $a \geq 0 \Longleftrightarrow$ (prema aksiomi 14°) $a + (-a) \geq 0 + (-a) \Longleftrightarrow$ (prema aksiomama 2° i 3°) $0 \geq -a$, a ovo je isto što i $-a \leq 0$.

(b) Na osnovu aksioma 1°, 2°, 3° i 14° je: $a \leq b \Longleftrightarrow a + (-a) \leq b + (-a) \Longleftrightarrow 0 \leq b + (-a) \Longleftrightarrow -b + 0 \leq -b + (b + (-a)) \Longleftrightarrow -b \leq (-b + b) + (-a) \Longleftrightarrow -b \leq 0 + (-a) \Longleftrightarrow -b \leq -a$.

(c) Na osnovu aksioma 3° i 14° je: $a < b \Longleftrightarrow a + (-b) < b + (-b) \Longleftrightarrow a + (-b) < 0 \Longleftrightarrow a - b < 0$.

Tvrđenje 4. (a) $a^2 = a \cdot a \geq 0$;

b) $1 > 0$;

c) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$;

d) 1. $(a \leq b \wedge c \geq 0) \Rightarrow ac \leq bc$, 2. $(a \leq b \wedge c \leq 0) \Rightarrow ac \geq bc$;

e) $0 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$;

f) $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$.

Dokaz. (a) 1° Ako je $a \geq 0$, tada je prema aksiomi 15° $a \cdot a = a^2 \geq 0$; 2° ako je $a < 0$, tada je $a = -b$, gde je $b > 0$, pa je $a \cdot a = (-b) \cdot (-b) =$ (na osnovu Tvrđenja 2 i 1° ovog tvrđenja)$= b \cdot b = b^2 > 0$.

b) Za proizvoljno $a \neq 0$ iz R je $a \cdot 0 = 0$ i $a \cdot 1 = a$, pa je $1 \neq 0$. Kako je, na osnovu prethodnog tvrđenja, $1 \cdot 1 > 0$ i osim toga je $1 \cdot 1 = 1$, to je $1 > 0$.

c) Neka je $a > 0$. Ako bi bilo $a^{-1} < 0$, tada bi bilo $-a^{-1} > 0$, pa bi dalje bilo $a \cdot (-a^{-1}) = -1 > 0$, što je suprotno već dokazanom $1 > 0$.

d) 1. Neka je $a \leq b$ i $c \geq 0$. Tada je $b - a \geq 0$, pa je $(b - a) \cdot c \geq 0$, tj. $bc - ac \geq 0$, odnosno $bc \geq ac$ ili, što je isto, $ac \leq bc$.

2. Ako je $c < 0$, tada je $-c > 0$, pa je na osnovu 1 $a \cdot (-c) \leq b \cdot (-c)$, tj. $-(ac) \leq -(bc)$, odnosno $0 \leq ac - bc$ ili $bc \leq ac$.

e) Iz $0 < a \leq b$, na osnovu d) 1, sledi $a^2 \leq ab$ i $ab \leq b^2$, pa je $a^2 \leq b^2$.

f) Ako je $a > 0$ i $b > 0$, tada je $a^{-1} > 0$ i $b^{-1} > 0$, pa $a < b \Rightarrow aa^{-1} < ba^{-1} \Rightarrow 1 < ba^{-1} \Rightarrow b^{-1} < b^{-1}ba^{-1} \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$.

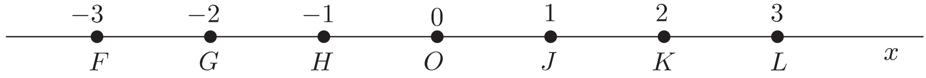
Tvrđenje 5. Skup realnih brojeva je *svuda gust*, tj. između svaka dva realna broja a i b postoji beskonačno mnogo realnih brojeva.

Dokaz. Neka je $a, b \in R$ i neka je $a < b$. Na osnovu aksiome 14° sledi da je $a + a < a + b$ i $a + b < b + b$, tj. $2a < a + b$ i $a + b < 2b$, odnosno $2a < a + b < 2b$. Na osnovu tvrđenja 4 c) i d) dalje sledi da je

$2^{-1}(2a) < 2^{-1}(a+b) < 2^{-1}(2b)$, tj. $(2^{-1} \cdot 2) \cdot a < 2^{-1}(a+b) < (2^{-1} \cdot 2) \cdot b$, odnosno $a < \dfrac{a+b}{2} < b$. Na taj način smo dobili da je broj $c = \dfrac{a+b}{2}$ između brojeva a i b, tj. $a < c < b$. Na isti način se dobijaju brojevi c_1 i c_2 tako da je $a < c_1 < c < c_2 < b$. Ovaj postupak se može nastaviti i po svojoj prirodi je takav da mu nema kraja, što upravo i znači da između realnih brojeva a i b postoji beskonačno mnogo realnih brojeva.

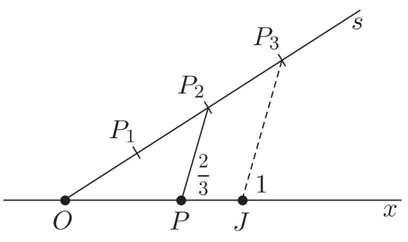
3. PREDSTAVLJANJE REALNIH BROJEVA TAČKAMA PRAVE

Izaberimo na pravoj x dve tačke O i J i pridružimo ih redom brojevima 0 i 1 (sl. 3). Ovim smo pravu x orijentisali tako što je pozitivan smer od tačke O prema tački J. Duž OJ naziva se *jedinična duž.* Broju 2 pridružujemo tačku K prave x tako da je $OK = 2OJ$ i J je između O i K. Broju -1 pridružujemo tačku H prave x, tako da je $OH = OJ$ i O je između J i H. Na analogan način se proizvoljnom celom broju može pridružiti jedna tačka prave x.

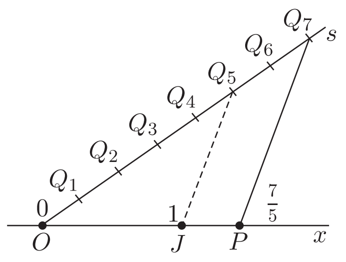


sl. 3

Svakom racionalnom razlomljenom broju može se takođe pridružiti tačka prave x. Pridružimo tačku, na primer, broju $\dfrac{2}{3}$. Na proizvoljnoj polupravoj Os nanesimo proizvoljnu duž tri puta.



sl. 4



sl. 5

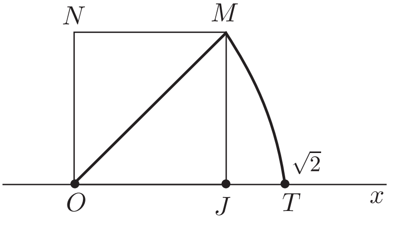
Na taj način dobijamo tačke P_1, P_2 i P_3 (sl. 4). Povucimo duž JP_3, a zatim njoj paralelnu duž P_2P, gde P pripada pravoj x. Tačku P upravo pridružujemo broju $\dfrac{2}{3}$. Sa sl. 5 vidi se kako je broju $\dfrac{7}{5}$ pridružena tačka P prave x. Sada je jasno kako se proizvoljnom racionalnom broju $\dfrac{p}{q} > 0$ ($p > 0$, $q > 0$) pridružuje tačka prave x. Na proizvoljnu polupravu Os nanese se proizvoljna duž $\max\{p, q\}$ puta. Tako se dobiju tačke $P_1, P_2, \ldots, P_{\max\{p,q\}}$. Zatim se povuče duž P_qJ i njoj paralelna duž P_pP, gde P pripada pravoj

x. Tačka P upravo se pridružuje broju $\frac{p}{q}$. Jasno, broju $-\frac{p}{q}$ pridružuje se tačka prave x simetrična tački P u odnosu na tačku O.

Tačke prave x pridružene racionalnim brojevima nazivaju se *racionalne tačke*. Na osnovu osobina skupa racionalnih brojeva sledi da između svake dve racionalne tačke postoji beskonačno mnogo racionalnih tačaka.

Jasno, sve tačke prave x nisu racionalne. Pridružimo tačku iracionalnom broju $\sqrt{2}$. Nad jediničnom duži OJ konstruišimo kvadrat $OJMN$, a zatim uzmimo na pravoj x tačku T s one strane tačke J s koje nije tačka O, tako da je $OM = OT$ (sl. 6). Tačku T upravo pridružujemo broju $\sqrt{2}$. Dakle, tačka T nije racionalna tačka. Uopšte, iracionalnim brojevima pridružujemo tačke prave x koje nisu racionalne i te tačke nazivamo *iracionalne tačke*.

Na ovaj način smo skup realnih brojeva preslikali na skup tačaka prave x i to preslikavanje je bijekcija. Prava x naziva se *brojevna osa*. Ako je realnom broju a pridružena tačka A brojevne ose, tada umesto da se kaže: "A je tačka koju smo pridružili realnom broju a" ili "A je tačka kojom smo na brojevnoj pravoj predstavili realan broj a", kako je pravilno, ali dugačko, uobičajeno je da se kaže nepravilno, ali kratko, da je to "tačka a".



sl. 6

4. PROŠIRENI SKUP REALNIH BROJEVA. INTERVALI

Već smo rekli da je skup realnih brojeva R potpuno uređen realcijom $\leq$ (manje ili jednako). U tako uređenom skupu R ne postoji ni maksimum ni minimum. Drugim rečima, skup realnih brojeva je neograničen i odozgo i odozdo. Da bismo tu činjenicu zapisali, skup R ćemo proširiti sa dva elementa: $+\infty$ (plus beskonačno) i $-\infty$ (minus beskonačno), tako da za svaki realan broj x važi da je $-\infty < x < +\infty$. Skup

$$\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$$

naziva se *prošireni skup realnih brojeva.* Elemente skupa $\overline{R}$ različite od $+\infty$ i $-\infty$, tj. realne brojeve, zvaćemo *konačnim elementima* ili *konačnim tačkama.*

Umesto $+\infty$ piše se i ∞.

Neka su a i b realni brojevi i neka je $a < b$; skup

$$[a, b] = \{x \in R |\, a \leq x \leq b\}$$

je *zatvoreni interval* ili *segment ili odsečak*, skup

$$(a, b) = \{x \in R |\, a < x < b\}$$

je *otvoreni interval*, skupovi

$$[a, b) = \{x \in R |\, a \leq x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \in R |\, a < x \leq b\}$$

su *poluotvoreni* (*poluzatvoreni*) intervali.

Tačke a i b su krajevi ili granice intervala.

Intervali čija je jedna granica $+\infty$ ili $-\infty$ su:

$$[a, +\infty) = \{x \in R |\, x \geq a\},$$
$$(a, +\infty) = \{x \in R |\, x > a\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \in R |\, x \leq b\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \in R |\, x < b\},$$

dok interval $(-\infty, +\infty)$ predstavlja skup realnih brojeva R, tj.

$$R = (-\infty, +\infty).$$

5. APSOLUTNA VREDNOST REALNOG BROJA

Definicija 6. *Apsolutna vrednost* (*modul*) realnog broja x je broj koji označavamo sa $|x|$ i koji je jednak broju x ako je $x \geq 0$, a $-x$ ako je $x < 0$. Dakle,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ako je} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{ako je} \quad x < 0. \end{cases}$$

Primer 1. $|x| = 3$, $|0| = 0$, $|-5| = -(-5) = 5$.

Jasno, $|x| \geq 0$ za svako $x \in R$ i $|x| = 0$ *akko* $x = 0$.

Istaknimo neka svojstva apsolutne vrednosti realnog broja.

Tvrđenje 6. Za svaki realan broj x je
(a) $|x| = |-x|$,
(b) $x \leq |x|$.

Dokaz. Sledi iz definicije apsolutne vrednosti broja.

Tvrđenje 7. Ako je a pozitivan realan broj, tada
(a) $|x| = a \Longleftrightarrow (x = a \vee x = -a)$,
(b) $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a \Longleftrightarrow x \in [-a, a]$,
(c) $|x| > a \Longleftrightarrow (x < -a \vee x > a) \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

Dokaz. Sledi iz definicije apsolutne vrednosti broja.

Tvrđenje 8. Za sve realne brojeve x i y važi:
a) $|x + y| \leq |x| + |y|$,

b) $||x|-|y|| \leq |x-y|$,
c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
d) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$.

Dokaz. a) 1° Ako je $x+y \geq 0$, tada je

$$|x+y| = x+y \leq |x|+|y|.$$

2° Ako je $x+y<0$, tada je

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leq |-x|+|-y| = |x|+|y|.$$

Važi opštija nejednakost

$$|x_1, +x_2+\cdots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$

koju zapisujemo i u obliku

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

a koja se dokazuje na isti način.

Iz dokazane nejednakosti sledi da je

$$|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|.$$

b) Ako stavimo $x=(x-y)+y$, tada je

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|,$$

tj.

$$|x|-|y| \leq |x-y|. \tag{1}$$

Ako sada stavimo $y=(y-x)+x$, tada je

$$|y| = |(y-x)+y| \leq |y-x|+|x|,$$

tj.

$$|y|-|x| \leq |y-x|,$$

odnosno

$$|y|-|x| \leq |x-y|,$$

III POGLAVLJE

REALNA FUNKCIJA JEDNE REALNE PROMENLJIVE – OSNOVNI POJMOVI

1. DEFINICIJA FUNKCIJE IZ R U R. NAČINI ZADAVANJA FUNKCIJE

Definicija 1. Ako se svakom elementu x nepraznog podskupa D skupa realnih brojeva R prema pravilu (zakonu) f pridruži jedinstven element $y \in R$, tada je f *realna funkcija jedne realne promenljive* ili *funkcija iz* R *u* R, definisana na skupu D.

Piše se

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

ili

$$x \to f(x), \quad x \in D.$$

Primer 1. $y = x^2$, $x \in R$ ili $x \to x^2$, $x \in R$ predstavlja kvadratnu funkciju na skupu R realnih brojeva, tj. funkciju koja svakom realnom broju pridružuje njegov kvadrat.

Skup D je *domen* ili *oblast definisanosti* funkcije f. Promenljiva x naziva se *nezavisno promenljiva* ili *argument* funkcije, promenljiva y naziva se *zavisno promenljiva*. Ako je $x = a$, $a \in D$, kažemo da je a *vrednost argumenta*, $b = f(a)$ je *vrednost funkcije* u tački $x = a$ ili *slika* od $a \in D$. Skup $V = f(D) = \{f(x) | x \in D\}$ je *skup vrednosti* funkcije f.

Definicija 2. Skup tačaka $M(x, y)$ u ravni Dekartovog[15)] pravouglog koordinatnog sistema Oxy, čije koordinate x i y zadovoljavaju jednačinu $y = f(x)$ je *grafik* funkcije $y = f(x)$.

Kriva u ravni Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema predstavlja grafik funkcije *akko* proizvoljna prava paralelna osi Oy seče tu krivu u najviše jednoj tački.

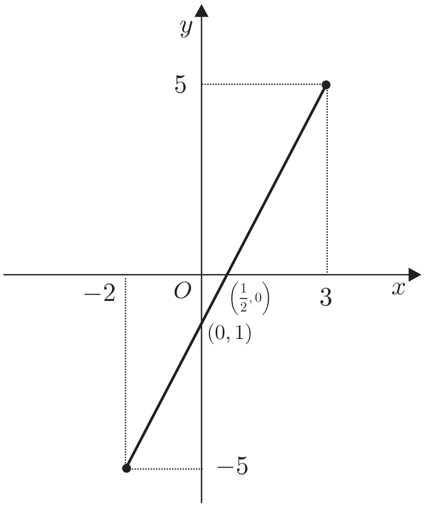
Primer 2. Neka je data funkcija

$$y = f(x) = 2x - 1, \quad -2 \leq x \leq 3.$$

Domen je segment $[-2, 3]$ skupa realnih brojeva, $f(-2) = -5$, $f(-1) = -3$, $f(0) = -1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f(3) = 5$, skup vrednosti funkcije je $V = f(D) = [-5, 5]$, (sl. 1).

[15)] René Decartes Cartesius (1596 -1650), francuski matematičar i filosof.

Realna funkcija jedne ralne promenljive, ili kako se još kaže, funkcija iz R u R, najčešće se zadaje formulom oblika $y = f(x)$[16]. Sama formula, ili bolje rečeno izraz $f(x)$, ukazuje nam kakve operacije treba obaviti nad vrednošću argumenta x da bi se dobila odgovarajuća vrednost funkcije. Pri tome, ako oblast definisanosti D nije data, podrazumeva se da je to najširi skup realnih brojeva za koji data formula ima smisla.



sl. 1

Primer 3. Funkcija

$$y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

definisana je na skupu $D = R \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, jer data formula ima smisla za sve realne brojeve osim za $x = 1$.

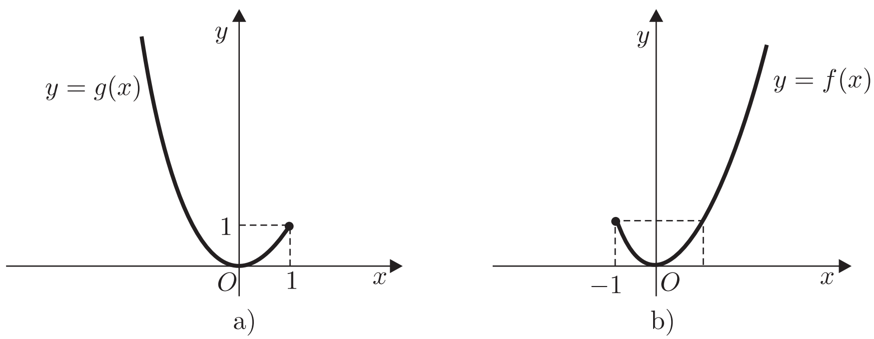
Definicija 3. Dve funkcije: $f : D_f \to R$ i $g : D_g \to R$ su *jednake* ako su ispunjena sledeća dva uslova:

1° $D_f = D_g = D$,

2° $(\forall x \in D)\ (f(x) = g(x))$.

Primer 4. Funkcije $f(x) = \ln x^2$, $x > 0$ i $g(x) = 2 \ln x$ su jednake.

Primer 5. Funkcije $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 1]$ i $g(x) = x^2$, $x \in [-1, +\infty)$ su, saglasno definiciji, različite funkcije (sl. 2 a i b).



sl. 2

[16]Umesto: ”funkcija f zadata formulom $y = f(x)$”, kako je pravilno, govorićemo kraće: ”funkcija $y = f(x)$”.

Definicija 4. *Restrikcija* ili *suženje* funkcije f, čiji je domen D, na nepraznom skupu $D_1 \subset D$ je funkcija g čiji je domen D_1, takva da je

$$(\forall x \in D_1)(g(x) = f(x)).$$

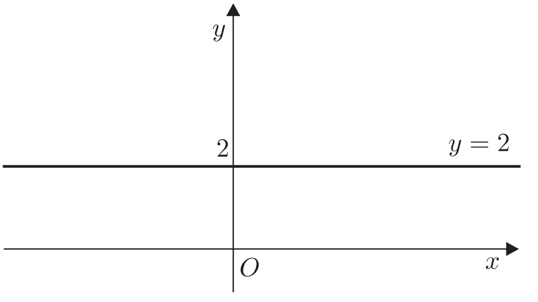
Obično se piše $g = f|D_1$.

Primer 6. Funkcija $g(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ je restrikcija funkcije $f(x) = \sin x$.

Definicija 5. Funkcija f, definisana na skupu D, takva da je

$$(\forall x \in D)(f(x) = C),$$

gde je C konstanta, je *funkcija-konstanta.*



sl. 3

Primer 7. Funkcija $y = f(x) = 2$ je konstanta (sl. 3).

Primer 8. Funkcija $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ je takođe konstanta na skupu R, jer je

$$(\forall x \in R)(\sin^2 x + \cos^2 x = 1).$$

Definicija 6. Funkcija f, definisana na skupu D, takva da je

$$(\forall x \in D)(f(x) = x)$$

je *identična funkcija* ili *identično preslikavanje* skupa D.

Primer 9. Funkcija $y = x$ je identičko preslikavanje na skupu R.

Funkcija se može zadati: *analitički*, *tabelarno* i *grafički.*

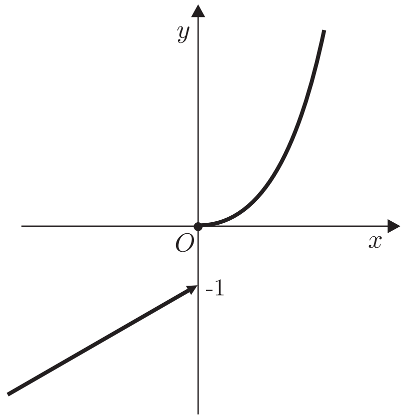
Kao što je već rečeno, funkcija se analitički najčešće zadaje formulom oblika

$$y = f(x).$$

U ovom slučaju kažemo da je funkcija zadata *eksplicitno.*

Nekada je funkcija na različitim skupovima zadata različitim formulama.

Primer 10. $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ (sl. 4).



sl. 4

Funkcija $y = y(x)$ može biti zadata jednačinom

$$F(x, y) = 0^{17)}.$$

U ovom slučaju kažemo da je funkcija zadata *implicitno.*

Primer 11. Jednačina

$$x^2 - xy - x - y = 0$$

definiše funkciju $y = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$.

Funkcija $y = y(x)$ može biti zadata *parametarskim* jednačinama

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$

gde je $t \in T$ parametar.[18)]

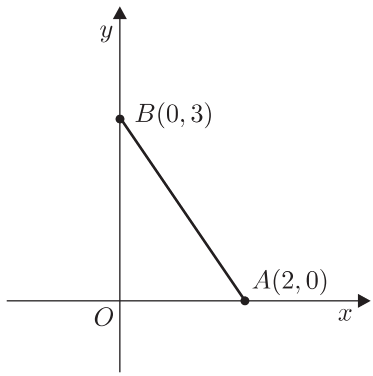
Primer 12. Parametarskim jednačinama

$$x = 2\cos^2 t, y = 3\sin^2 t,$$

gde $t \in R$, definisana je jedna funkcija čiji je implicitni oblik

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3,$$

a grafik duž AB (sl. 5)



sl. 5

Funkcija može biti zadata i *polarnom* jednačinom

$$\rho = f(\varphi), \quad \varphi \in P,$$

gde su φ i ρ polarne koordinatne tačke. Funkcija zadata polarnom jednačinom može se grafički predstaviti u polarnom koordinatnom sistemu.

[17)] Pod kojim uslovima jednačina $F(x, y) = 0$ definiše y kao funkciju od x, videćemo u IX poglavlju, odeljak 1.6. Ako jednačina $F(x, y) = 0$ definiše y kao funkciju od x, to još uvek ne znači da se y može izraziti pomoću x.

[18)] Pod kojim uslovom parametarske jednačine definišu funkciju videćemo kasnije.

Drugi način zadavanja funkcije je *tabelarni.* Tablicom se prikazuju vrednosti funkcije zajedno sa odgovarajućim vrednostima nezavisno promenljive.

Na primer, ako je funkcija f definisana na konačnom skupu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ona se jednostavno može prikazati sledećom tablicom

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Tablica se formira i u slučaju kada se merenjem dođe do podataka o zavisnosti dve veličine. Na primer, meri se temperatura vazduha u toku 24 sata u razmacima od jednog sata. Iznosi temperature, zajedno sa vremenom merenja, stave se u tablicu. Na osnovu formirane tablice moguće je, sa određenom tačnošću, naći iznos temperature u proizvoljnom vremenskom momentu koji se nalazi između dva momenta u kojima je temperatura merena. Ovo je jedan od brojnih primera koji pokazuju da se u prirodnim naukama i tehnici zavisnost među dvema veličinama utvrđuje eksperimentalnim putem. Na osnovu dobijenih podataka formira se tablica funkcionalne zavisnosti tih veličina. Eventualno nalaženje formule, koja opisuje funkcionalnu zavistnost merenih veličina, može biti složeno.

Treći način predstavljanja funkcije je *grafički*, tj. crtanjem grafika u Dekartovom pravouglom ili polarnom koordinatnom sistemu. Isto tako, korišćenjem različitih aparata moguće je funkcionalnu zavisnost dve veličine dobiti pomoću grafika.

2. OPERACIJE SA FUNKCIJAMA

2.1. Aritmetičke operacije s funkcijama

Neka su f i g funkcije iz R u R definisane redom na skupovma D_f i D_g. *Zbir, razlika, proizvod* i *količnik* funkcija f i g defiiniše se na sledeći način:

$$\begin{gathered}(f+g)(x) = f(x) + g(x),\\ (f-g)(x) = f(x) - g(x),\\ (fg)(x) = f(x)\cdot g(x),\\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0.\end{gathered}$$

To znači da je vrednost funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g u tački x jednaka redom zbiru, razlici, proizvodu, količniku vrdnosti funkcija f i g u toj tački.

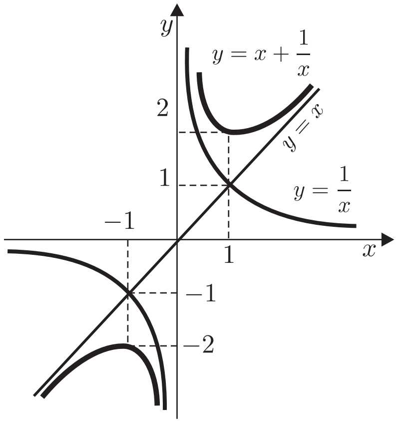
Oblast deefinisanosti funkcija $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ jednaka je preseku $D_f \cap D_g$, s tim što se iz njega za funkciju $\dfrac{f}{g}$ odstrane tačke u kojima je $g(x) = 0$.

Grafici funkcija $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ dobijaju se primenom odgovarajućih aritmetičkih operacija na grafike funkcija f i g. Naime, ako su $M(x,y_f)$ i $N(x,y_g)$ tačke na graficima funkcija f i g, koje imaju istu apscisu, tada se odgovarajuća tačka grafika zbira, razlike, proizvoda i količnika funkcija f i g dobija sabiranjem, oduzimanjem, množenjem, deljenjem ordinata y_f i y_g.

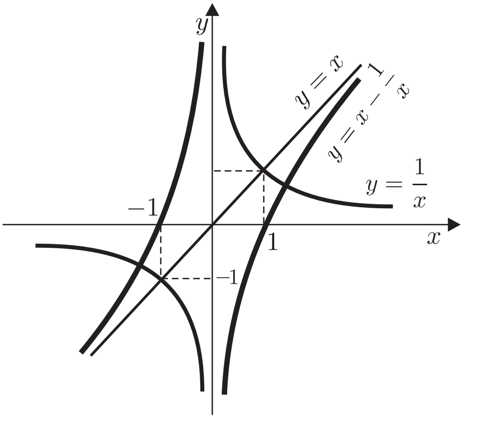
Primer 13. Neka su date funkcije: $f(x)=x$ i $g(x)=\dfrac{1}{x}$. Tada je

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+\frac{1}{x},$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x-\frac{1}{x}.$$

Grafici funkcija $f+g$ i $f-g$ lako se dobijaju pomoću grafika funkcija f i g (sl. 6 i 7).



sl. 6



sl. 7

2.2. Kompozicija funkcija. Složena funkcija

Nekada se preslikavanje može realizovati "u dva ili više koraka", tj. uzastopnom primenom dva ili više preslikavanja.

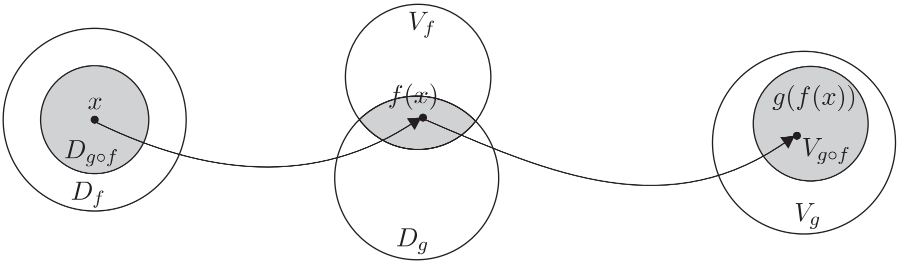
Primer 14. Posmatrajmo funkciju $h(x)=\cos x^2$. Vidimo da se do vrednosti funkcije h za proizvoljan realan broj x dolazi pomoću funkcija $f(x)=x^2$ i $g(x)=\cos x$, tako što funkcija f svaki realan broj x preslika u njegov kvadrat, a zatim funkcija g kvadratu od x pridružuje njegov kosinus.

Definicija 7. Neka je f funkcija sa domenom D_f i skupom vrednosti V_f i g funkcija sa domenom D_g i skupom vrednosti V_g. Funkcija $h=g\circ f$, takva da je

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x)),$$

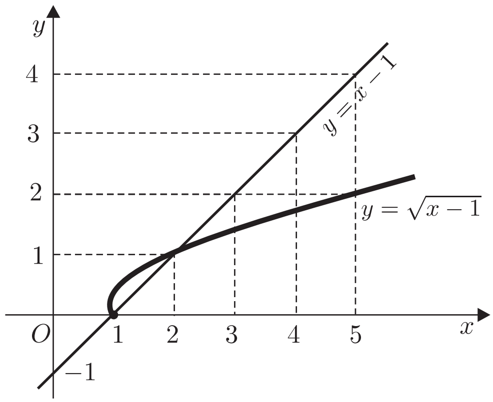
je *složena funkcija* ili *kompozicija* funkcija f i g.

Domen $D_{g\circ f}$ funkcije $g \circ f$ je skup svih vrednosti x iz D_f za koje je $f(x) \in D_g$ (sl. 8).



sl. 8

Kod formiranja složene funkcije h pomoću funkcija f i g često se, iz praktičnih razloga, zavisno promenljiva funkcije f i nezavisno promenljiva funkcije g označavaju istim slovom, pa se obrazovanje složene funkcije može precizirati ovako: ako je y funkcija od u, tj. $y = g(u)$, a u je funkcija od x, tj. $u = f(x)$, tada je $y = g(f(x))$ složena funkcija od f i g promenljive x.



sl. 9

Ovakvom formulacijom se, možda, previše ističe važnost slova kojima su označene promenljive kod funkcije. Međutim, u formuli

$$y = f(x), \quad x \in D$$

nije bitno koja su slova upotrebljena za označavanje promenljivih. Tako je formulama $y = x^2$, $u = t^2$, $z = y^2$ zadata ista funkcija - "kvadriranje realnog broja". U prethodnoj formuli bitan je simbol f, jer on označava zakon pridruživanja. Tako, ako je $y = f(x) = x^3$ i $y = g(x) = \log_2(x)$, $x > 0$, tada, kao što se vidi, f znači "stepenovanje sa 3", a g "logaritmovanje pozitivnog broja za osnovu 2", pa $g \circ f$ znači "logaritmovanje za osnovu 2 trećeg stepena pozitivnog broja", tj.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^3) = \log_2 x^3, \quad x > 0.$$

Grafik složene funkcije može se nacrtati pomoću grafika njenih komponenti.

Primer 15. Grafik funkcije $y = \sqrt{x-1}$ možemo dobiti pomoću grafika funkcija $y = x - 1$ i $y = \sqrt{x}$. To postižemo korenovanjem ordinata tačaka grafika funkcije $y = x - 1$ za $x \geq 1$ (sl. 9).

Kao što je poznato, slaganje funkcija je asocijativno, ali nije komutativno.

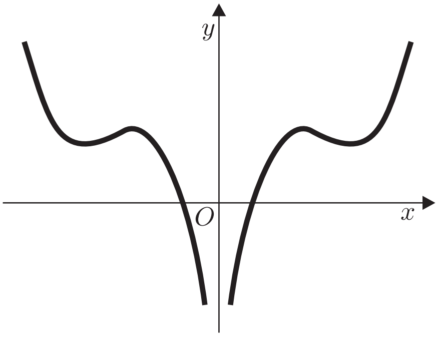
3. PARNE I NEPARNE FUNKCIJE

Definicija 8. Za funkciju f definisanu na skupu D kažemo da je *parna* ako su ispunjena sledeća dva uslova:
1° $(\forall x)\ (x \in D \Rightarrow -x \in D)$,
2° $(\forall x \in D)\ (f(-x) = f(x))$.

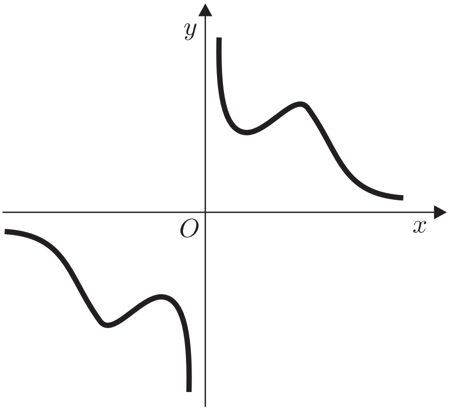
Za funkciju f kažemo da je *neparna* ako su ispunjena sledeća dva uslova:
1° $(\forall x)\ (x \in D \Rightarrow -x \in D)$,
2° $(\forall x \in D)\ (f(-x) = -f(x))$.

Drugim rečima, funkcija je parna ako je njen domen simetričan u odnosu na nulu i za svake dve suprotne vrednosti argumenta postiže istu vrednost, a neparna ako je njen domen simetričan u odnosu na nulu i za svake dve suprotne vrednosti argumenta postiže suprotne vrednosti.

Grafik parne funkcije je simetričan u odnosu na osu Oy (sl. 10), a grafik neparne u odnosu na koordinatni početak (11).



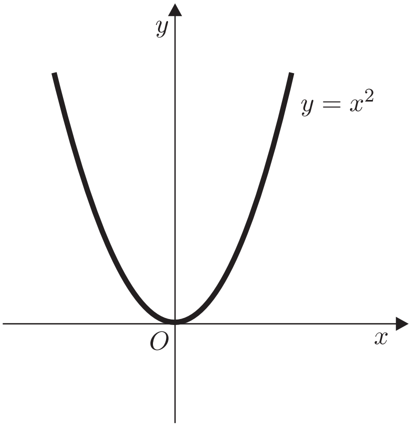
sl. 10



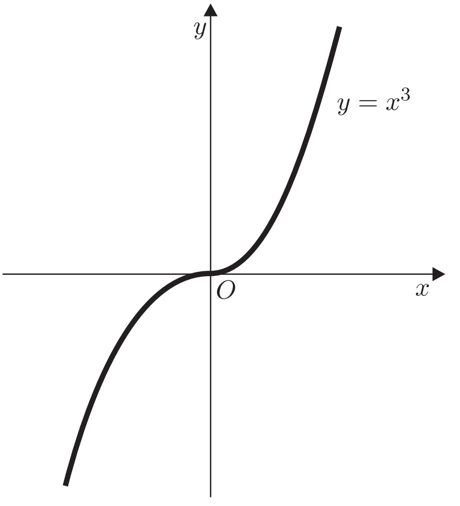
sl. 11

Primer 16. Funkcija $f(x) = x^2$ je parna (sl. 12), jer je definisana na skupu R realnih brojeva i osim toga je

$$(\forall x \in R)\ ((-x)^2 = x^2)$$



sl. 12

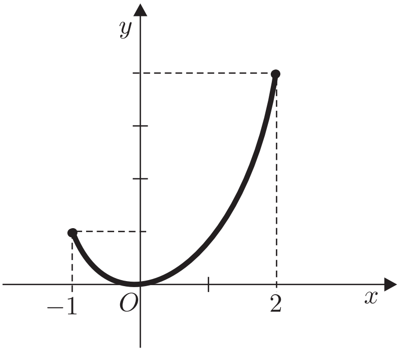


sl. 13

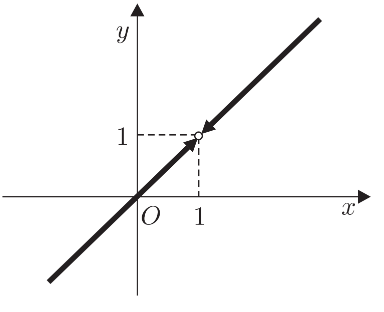
Primer 17. Funkcija $f(x) = x^3$ je neparna (sl.), jer je definisana na skupu R realnih brojeva i osim toga je

$$(\forall x \in R)\ ((-x)^3 = -x^3).$$

Primer 18. Funkcija $f(x) = x^2$, $-1 \leq x \leq 2$ nije parna, jer njen domen nije simetričan u odnosu na nulu (sl. 14).



sl. 14



sl. 15

Primer 19. Funkcija $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ nije neparna. Naime, $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x-1} = x$ za $x \neq 1$, što znači da domen funkcije nije simetričan u odnosu na nulu (sl. 15).

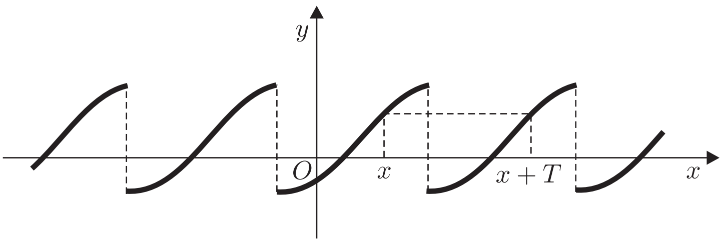
Većina funkcija nisu ni parne ni neparne.

4. PERIODIČNE FUNKCIJE

Definicija 9. Funkcija f, definisana na skupu D, je *periodična* ako postoji broj $T \neq 0$, tako da za svako $x \in D$ je i $x + T \in D$, $x - T \in D$ i

$$(\forall x \in D))\ (f(x+T) = f(x)). \tag{1}$$

Najmanji pozitivan broj T sa navedenom osobinom naziva se *osnovni period* funkcije f. Ako govorimo o periodu funkcije, obično se podrazumeva osnovni period (sl. 16).



sl. 16

Poznato je da su trigonometrijske funkcije periodične. Osnovni period funkcija $\sin x$ i $\cos x$ je 2π, a funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ je π.

Primer 20. Koristeći definiciju periodičnosti pokazaćemo da osnovni period funkcije $f(x) = \sin x$ iznosi 2π.

Tražimo broj $T > 0$ takav da je za svako $x \in R$

$$\sin(x+T) = \sin x,$$

odnosno

$$\sin(x+T) - \sin x = 0,$$

tj.

$$2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x + \frac{T}{2}\right) = 0.$$

Proizvod na levoj strani poslednje jednakosti jednak je nuli nezavisno od x ako je $\sin\dfrac{T}{2} = 0$, tj. $T = 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Najmanji pozitivan broj je očigledno $T = 2\pi$, što predstavlja osnovni period funkcije $f(x) = \sin x$.

Tvrđenje 1. Ako je funkcija f periodična sa osnovnim periodom T, tada je i nT, gde je n proizvoljan ceo broj različit od nule, takođe period funkcije f.

IV POGLAVLJE

BESKONAČNI BROJEVNI NIZOVI

1. DEFINICIJA I NAČINI ZADAVANJA BESKONAČNOG NIZA

Definicija 1. Funkcija f, koja preslikava skup prirodnih brojeva N u skup A je *beskonačni niz u skupu* A.

Ako je $f(x) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3, \ldots,\ f(n) = a_n, \ldots$, tada se niz može zapisati u obliku

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots),$$

ili jednostavnije bez zagrada:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Kaže se da su $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *članovi* niza. Svaki niz ima beskonačno mnogo članova. Član $a_n = f(n)$ naziva se *opšti član* niza. Ako je poznat opšti član niza, tada se niz može jednostavno označiti sa $(a_n)_{n \in N}$, pri čemu se $n \in N$ u indeksu može izostaviti, jer se podrazumeva. Niz se može zadati i rekurentnom formulom, na primer, oblika

$$a_1 = b, \quad a_{n+1} = g(a_n) \quad (n \in N)$$

ili oblika

$$a_1 = b, \quad a_2 = c, \quad a_{n+2} = h\left(a_n, a_{n+1}\right) \quad (n \in N).$$

Skup vrednosti niza $(a_n)_{n \in N}$ je skup $V = \{a_n | \, n \in N\}$. On može biti konačan ili beskonačan (prebrojiv).

Mi ćemo isključivo razmatrati nizove čiji su članovi realni brojevi.

Navodimo nekoliko primera nizova.

Primer 1. Niz $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$, tj. niz $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \in N}$ naziva se *harmonijski* niz.

Primer 2. Niz čiji je opšti član $a_n = 1 + (-1)^n$ je, u stvari, niz

$$0, 2, 0, 2, \ldots, 0, 2, \ldots.$$

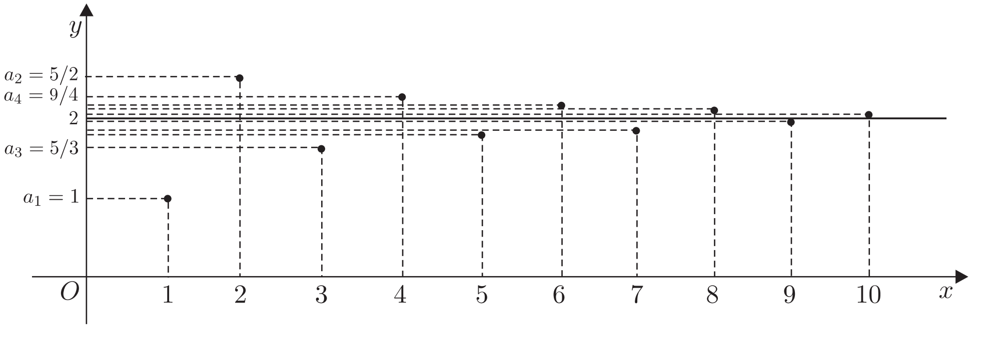
Primer 3. Niz čiji je opšti član $a_n = 1^n$ je konstantan niz

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

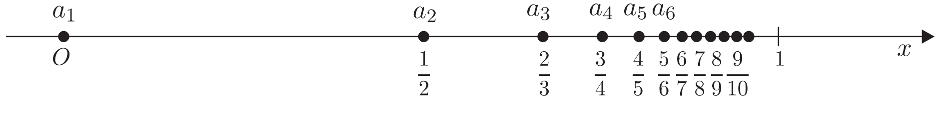
Kao što se vidi, skup vrednosti niza u Primeru 1 je beskonačan skup $V_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$, u Primeru 2 dvočlan skup $V_2 = \{0, 2\}$, a u Primeru 3 jednočlan skup $V_3 = \{1\}$.

Niz, kao i svaku funkciju jedne promenljive, možemo grafički predstaviti u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, a možemo i na brojevnoj osi.

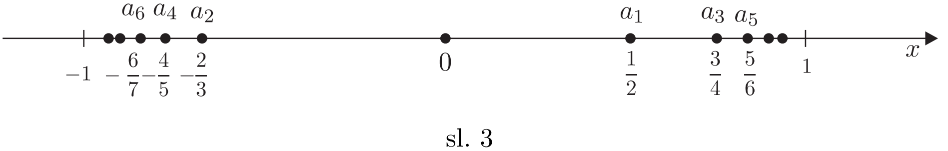
Primer 4. Nizovi čiji su opšti članovi $a_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{n-1}{n}$, $c_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$, $d_n = \frac{n+1}{2}$ predstavljeni su grafički redom na slikama 1, 2, 3, 4.



sl. 1

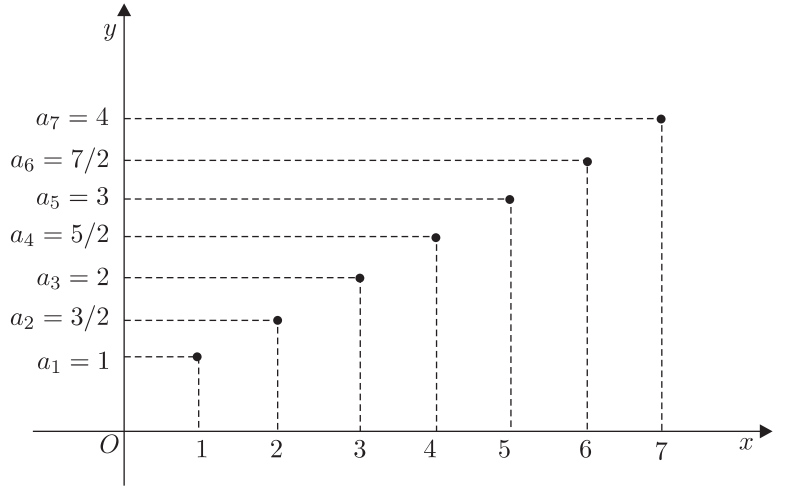


sl. 2



sl. 3

Definicija 2. Ako su $(a_n)_{n\in N}$ i $(b_n)_{n\in N}$ dati nizovi, tada su nizovi $(a_n + b_n)_{n\in N}$, $(a_n - b_n)_{n\in N}$, $(a_n \cdot b_n)_{n\in N}$ i $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in N}$ redom *zbir*, *ralzika*, *proizvod* i *količnik* nizova $(a_n)_{n\in N}$ i $(b_n)_{n\in N}$.



sl. 4

Napomena 1. Niz $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in N}$ moguće je obrazovati samo u slučaju kad su svi članovi niza $(b_n)_{n\in N}$ različiti od nule. Niz $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ se može obrazovati i u slučaju kad je konačno mnogo članova niza $(b_n)_{n\in N}$ jednako nuli, počev od onog indeksa od koga su svi članovi b_n različiti od nule.

Definicija 3. Niz $(a_n)_{n\in N}$ je *ograničen odozgo* (*odozdo*) ako postoji realan broj $M(m)$, takav da je

$$a_n \le M \quad (a_n \ge m) \quad (n \in N).$$

Broj M se naziva *majoranta* (*gornja granica*), a broj m *minoranta* (*donja granica*) niza $(a_n)_{n\in N}$.

Definicija 4. Niz $(a_n)_{n\in N}$ je ograničen ako je ograničen i odozgo i odozdo, tj. ako postoje realni brojevi M i m, tako da za sve članove niza a_n važi nejednaksot

$$m \le a_n \le M. \tag{1}$$

Jasno, ograničen niz ima beskonačno mnogo majoranti, odnosno minoranti, pa utvrđivanje ograničenosti niza svodi se na pronalaženje bar jedne majorante, odnosno minorante tog niza.

Primetimo da se uslov ograničenosti niza može precizirati i u drugoj ekvivalentnoj formi: niz $(a_n)_{n\in N}$ je ograničen ako postoji pozitivan broj G, takav da za svaki član niza važi

$$|a_n| \leq G. \tag{2}$$

Zaista, ako svaki član niza $(a_n)_{n\in N}$ zadovoljava relaciju (1), to uzimajući da je $G = \max\{|m|, |M|\}$, očigledno važi (2). Obrnuto, ako svaki član niza $(a_n)_{n\in N}$ zadovoljava relaciju (2), tada uzimajući da je $m = -G$ i $M = G$, sledi (1).

Primer 5. Niz $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)_{n\in N}$ je oganičen. Naime, $0 \leq a_n < 1$ za svako $n \in N$. Najmanji član niza je 0, dok najveći ne postoji.

Primer 6. Niz

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, \ldots$$

je ograničen odozdo, ali nije odozgo.

2. GRANIČNA VREDNOST NIZA

Ovde će nas intersovati kako se ponašaju članovi niza sa rašćenjem indeksa. Razmotrimo zato ponovo nizove u Primeru 4 koje smo i grafički predstavili. Primetimo da se članovi niza $(a_n)_{n\in N}$ nagomilavaju oko tačke (realnog broja) 2 u sledećem smislu: ako uzmemo proizvoljnu, pa i koliko hoćemo malu okolinu tačke 2, svi članovi niza, počev od nekog indeksa, su u toj okolini. Istu osobinu ima broj 1 kod niza $(b_n)_{n\in N}$. Za niz $(a_n)_{n\in N}$ takav broj ne postoji. Najzad, vidimo da se članovi niza $(d_n)_{n\in N}$ s rastom indeksa beskonačno uvećavaju. Naime, ako uzmemo proizvoljan pozitivan realan broj, pa i po volji veliki, svi članovi niza, počev od nekog indeksa, su veći od tog broja.

Dajemo sada definiciju granične vrednosti (limesa) niza.

Definicija 5. Realan broj (tačka) a je *granična vrednost* niza $(a_n)_{n\in N}$ ako za svaku okolinu $\mathcal{O}(a)$ tačke a postoji prirodan broj n_0, koji zavisi od izabrane okoline $\mathcal{O}(a)$, tako da svi članovi niza a_n za $n > n_0$ pripadaju okolini $\mathcal{O}(a)$.

Piše se po dogovoru

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

(čita se: limes od a_n, kad n teži u beskonačnost, je a).

Formalno-logički zapis date definicije je:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Longleftrightarrow (\forall\mathcal{O}(a))(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n > n_0 \Rightarrow a_n \in \mathcal{O}(a)).$$

Uobičajenija od date je definicija granične vrednosti niza pomoću ε-okolina tačke.

Definicija 6. Realan broj (tačka) a je *granična vrednost* niza $(a_n)_{n \in N}$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0, koji zavisi od ε, tako da je za svako $n > n_0$ ispunjeno $|a_n - a| < \varepsilon$ (ili, što je isto, $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, odnosno $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$).

Formalno-logički zapis date definicije je

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Dajemo još jednu definiciju granične vrednosti niza.

Definicija 7. Realan broj (tačka) a je *granična vrednost* niza $(a_n)_{n \in N}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalaze svi članovi niza, osim možda njih konačno mnogo, ili kako se to još kaže, *skoro svi članovi niza.*

Definicija 8. Za niz $(a_n)_{n \in N}$ koji ima konačnu graničnu vrednost, tj. čija je granična vrednost realan broj a, kažemo da je *konvergentan.*

U ovom slučaju kaže se još da niz $(a_n)_{n \in N}$ *konvergira* ka a ili da a_n teži ka a kad $n \to \infty$, pa se upotrebljava i oznaka

$$a_n \to a \quad \text{kad } n \to +\infty \text{ ili } a_n \to a \quad (n \to +\infty).$$

Za niz koji nije konvergentan, kažemo da je *divergentan.* Razlikujemo divergentne nizove u *užem* i *širem smislu.*

Definicija 9. Ako za svaki realan broj $M > 0$, postoji priridan broj n_0, koji zavisi od M, tako da su svi članovi niza $(a_n)_{n \in N}$ za $n > n_0$ veći od M, tada kažemo da niz $(a_n)_{n \in N}$ *divergira* ka $+\infty$ i pišemo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$

Dakle,

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \iff (\forall M > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n > n_0 \Rightarrow a_n > M).$$

Definicija 10. Ako za svaki realan broj $K < 0$, postoji prirodan broj n_0, koji zavisi od K, tako da su svi članovi niza $(a_n)_{n \in N}$ za $n > n_0$ manji od K, tada kažemo da niz $(a_n)_{n \in N}$ *divergira* ka $-\infty$ i pišemo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty.$$

Dakle,

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \iff (\forall K < 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n > n_0 \Rightarrow a_n < K).$$

Nizovi koji divergiraju ka $+\infty$ ili $-\infty$, tj. nizovi čije su granične vrednosti $+\infty$ ili $-\infty$ u proširenom skupu realnih brojeva $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$, su *divergentni nizovi u užem smislu.* Ostali divergentni nizovi su divergentni u širem smislu.

Primer 7. Dokažimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{3n-1} = \dfrac{2}{3}$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj, tada je

$$\left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{5}{3(3n-1)}\right| < \varepsilon \iff \frac{5}{3(3n-1)} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon}+1\right).$$

Ako stavimo da je $n_0 = \left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{3\varepsilon}+1\right)\right]$, tj. n_0 je najveći ceo broj koji je manji ili jednak od $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{3\varepsilon}+1\right)$, tada je za svako $n \in N$, takvo da je $n > n_0$, ispunjeno $\left|\dfrac{2n+1}{3n-1} - \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon$, a što upravo i znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{3n-1} = \dfrac{2}{3}$.

Primer 8. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2n-2}{n^2-5n-4} = 1$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj, tada je

$$\left|\frac{n^2+2n-2}{n^2-5n-4} - 1\right| = \left|\frac{7n+2}{n^2-5n-4}\right| = \frac{7n+2}{|n^2-5n-4|}.$$

Kako je $7n+2 \leq 7n+2n = 9n$ za svako $n \in N$ i $|n^2-5n-4| \geq n^2-5n-4 = n^2-(5n+4) \geq n^2 - \dfrac{1}{2}n^2 = \dfrac{1}{2}n^2$ za $n \geq 11$, to je $\dfrac{7n+2}{|n^2-5n-4|} \leq \dfrac{9n}{\frac{1}{2}n^2} = \dfrac{18}{n} < \varepsilon$, za $n > \dfrac{18}{\varepsilon}$. Ako je $n_0 = \max\left\{11, \left[\dfrac{18}{\varepsilon}\right]\right\}$, tada je $\left|\dfrac{n^2+2n-1}{n^2-5n-4} - 1\right| < \varepsilon$ za svaki prirodan broj $n > n_0$, a to upravo znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2n-1}{n^2-5n-4} = 1$.

3. OSOBINE KONVERGENTNIH NIZOVA

Tvrđenje 1. Granična vrednost niza je jedinstvena, tj. konvergentan niz ne može imati dve različite granične vrednosti.

Dokaz. Pretpostavimo da niz $(a_n)_{n\in N}$ ima dve granične vrednosti a i b, gde je $a \neq b$. Uzmimo ε-okolinu tačaka a i b za $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|a-b|$. Kako je $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(b) = \varnothing$, nemoguće je da i u $\mathcal{O}_\varepsilon(a)$ i $\mathcal{O}_\varepsilon(b)$ budu skoro svi članovi niza $(a_n)_{n\in N}$.

Tvrđenje 2. Svaki konvergentan niz je ograničen.

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} = a$, tada postoji prirodan broj n_0, takav da je $|a_n - a| < 1$ za svako $n > n_0$. Sledi da je

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

za svako $n > n_0$. Ako uzmemo da je

$$G = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\},$$

tada je $|a_n| \leq G$ za svako $n \in N$, što je i trebalo dokazati.

Tvrđenje 3. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj, tada postoji prirodan broj n_0, takav da je

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{za svako} \quad n > n_0.$$

No, kako je $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$, sledi da je i

$$||a_n| - |a|| < \varepsilon \quad \text{za svako} \quad n > n_0,$$

tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$.

Da iz $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$ ne sledi uvek $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, pokazuje primer niza $\left((-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in N}$. Naime, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|(-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, dok $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}$ ne postoji.

Ako je $a = 0$, tada $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ očigledno povlači $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Tvrđenje 4. Ako je, za svako $n \in N$, $a_n = a$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

Dokaz. Za proizvoljno ε je $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ za svako $n \in N$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

Tvrđenje 5. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ i $a_n \leq b_n$ za svako $n \in N$, tada je $a \leq b$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $b < a$ i uzmimo da je $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|a - b| = \dfrac{1}{2}(a - b)$. Tada postoji prirodan broj n_1, takav da je

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{ili} \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

za svaki prirodan broj $n > n_1$ i prirodan broj n_2, takav da je

$$|b_n - b| < \varepsilon \quad \text{ili} \quad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$$

za svaki prirodan broj $n > n_2$. Ako stavimo da je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tada je

$$b_n < b + \varepsilon = b + \frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(a+b) = a - \frac{1}{2}(a-b) = a - \varepsilon < a_n$$

za svaki prirodan broj $n > n_0$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom: $a_n \leq b_n$ $(n \in N)$. Sledi da ne može biti $b < a$, pa je $a \leq b$.

Napomena 2. Ako se u prethodnom tvrđenju uslov $a_n \leq b_n$ zameni uslovom $a_n < b_n$, zaključak ostaje isti, tj. $a \leq b$, a ne $a < b$.

Primer 9. Za nizove čiji su opšti članovi $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ i $b_n = \dfrac{n}{n+1}$ važi $a_n < b_n$ za svako $n \in N$. Međutim, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$.

Tvrđenje 6. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$ i $a_n \leq c_n \leq b_n$ za svako $n \in N$, tada je i $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj, tada postoje n_1, $n_2 \in N$, takvi da je

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

za svaki prirodan broj $n > n_1$ i

$$|b_n - a| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

za svaki prirodan broj $n > n_2$. Stavimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada je

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon,$$

tj.

$$|c_n - a| < \varepsilon$$

za svaki prirodni broj $n > n_0$. Dakle, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a$, što je i trebalo dokazati.

Napomena 3. S obzirom na definiciju granične vrednosti niza, osobine nizova u pretpostavkama prethodna tri tvrđenja ne moraju biti ispunjene za svako $n \in N$, već počev od nekog $n_0 \in N$.

Napomena 4. Tvrđenja 1, 3, 5 i 6 odnose se i na nizove divergentne u užem smislu, tj. nizove čija je granična vrednost $+\infty$ ili $-\infty$.

Definicija 11. Niz $(\alpha_n)_{n\in N}$ naziva se *nula-niz* ili *beskonačno mala* ili još *beskonačno mala veličina* ako je

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.$$

Drugim rečima, niz $(\alpha_n)_{n\in N}$ je nula-niz ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$, postoji priridan broj n_0, tako da je $|\alpha_n| < \varepsilon$ za svaki prirodan broj $n > n_0$.

Primer 10. Niz $\left(\dfrac{2+(-1)^n}{n}\right)_{n\in N}$ je nula-niz. Naime, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ je $\left|\dfrac{2+(-1)^n}{n}\right| \le \dfrac{3}{n} < \varepsilon$ *akko* $n > \dfrac{3}{\varepsilon}$. Ako je $n_0 = \left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]$, tada je za svako $n > n_0$ ispunjeno $\left|\dfrac{2+(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{n} = 0$.

Tvrđenje 7. Zbir i razlika dva nula-niza je nula-niz.

Dokaz. Neka su $(\alpha_n)_{n\in N}$ i $(\beta_n)_{n\in N}$ nula-nizovi. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj, tada postoje prirodni brojevi n_1 i n_2, takvi da je

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za svako} \quad n > n_1$$

i

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za svako} \quad n > n_2$$

Ako je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tada je

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

za svako $n > n_0$, a to upravo znači da je $(\alpha_n + \beta_n)$ nula-niz.

Da je $(\alpha_n - \beta_n)$ nula-niz sledi iz nejednakosti $|\alpha_n - \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|$.

Na isti način se može dokazati da je uopšte zbir konačno mnogo nula-nizova nula-niz.

Tvrđenje 8. Proizvod ograničenog niza i nula-niza je nula-niz.

Dokaz. Neka je $(a_n)_{n\in N}$ ograničen niz. Tada postoji pozitivan broj G, takav da je $|a_n| \le G$ za svako $n \in N$. Neka je $(\alpha_n)_{n\in N}$ nula-niz. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$, takav da je $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{G}$ za svako $n > n_0$. Sledi da je

$$|a_n \cdot \alpha_n| = |a_n| \cdot |\alpha_n| < G \cdot \frac{\varepsilon}{G} = \varepsilon$$

za svako $n > n_0$, a što upravo i znači da je niz $(a_n\alpha_n)$ nula-niz.

Posledica 1. Proizvod dva ili bilo kog konačnog broja nula-nizova je nula-niz.

Tvrđenje 9. Niz $(a_n)_{n\in N}$ konvergira ka a *akko* je $(a_n - a)$ nula-niz.

Dokaz. Neka $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$, takav da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za svako $n > n_0$, a to znači da je niz $(a_n - a)_{n\in N}$ nula-niz.

Obrnuto, neka je niz $(\alpha_n)_{n\in N}$, gde je $\alpha_n = a_n - a$ nula-niz. To znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$, takav da je $|\alpha_n| = |a_n - a| < \varepsilon$ za svako $n > n_0$. Ovo upravo znači da $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$.

Definicija 12. Niz $(\alpha_n)_{n\in N}$ je *beskonačno velika* ili *beskonačno velika veličina* ako je
$$\lim_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty.$$

Drugim rečima, $(a_n)_{n\in N}$ je *beskonačno velika* ako za svaki pozitivan broj G postoji prirodan broj n_0, takav da je $|a_n| > G$ za svako $n > n_0$.

Primer 11. Nizovi $(n)_{n\in N}$, $\left((-1)^{n+1}\cdot n\right)_{n\in N}$, $\left(-\dfrac{n}{100}\right)_{n\in N}$ su beskonačno velike.

Ako, počev od nekog indeksa, svi članovi beskonačno velike $(a_n)_{n\in N}$ su pozitivni (negativni), tada beskonažno velika divergira u užem smislu, tj. $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ ($\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$).

Ako je niz $(a_n)_{n\in N}$ beskonačno velika i $a_n \neq 0$ za svako $n \in N$, tada je niz $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\in N}$ beskonačno mala (nula-niz).

Zaista, za proizvoljan realan broj $G > 0$ postoji $n_0 \in N$, takav da je $|a_n| > G$ za svako $n > n_0$. Dalje sledi da je $\left|\dfrac{1}{a_n}\right| < \dfrac{1}{G}$. Ako uzmemo da je $\varepsilon = \dfrac{1}{G}$, tada je $\left|\dfrac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$ za svako $n > n_0$, tj. niz $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\in N}$ je beskonačno mala.

Važi i obrnuto: ako je $(\alpha_n)_{n\in N}$ beskonačno mala i $\alpha_n \neq 0$ za svako $n \in N$, tada je $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\in N}$ beskonačno velika.

Sledeće tvrđenje pokazuje da se četiri aritmetičke operacije s konvergentnim nizovima prenose i na njihove granične vrednosti.

Tvrđenje 10. Ako su $(a_n)_{n\in N}$ i $(b_n)_{n\in N}$ konvergentni nizovi i $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, tada je:

a) $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n = a + b$,

b) $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n = a - b$,

c) $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n = ab$,

d) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_b} = \dfrac{a}{b}$ ($b_n \neq 0$ za svako $n \in N$ i $b \neq 0$).

Dokaz. Prema prethodnom tvrđenju važe jednakosti $a_n = a + \alpha_n$ i $b_n = b + \beta_n$, pri čemu su $(\alpha_n)_{n\in N}$ i $(\beta_n)_{n\in N}$ nula-nizovi.

a) Kako je

$$a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$$

i kako je $(\alpha_n + \beta_n)$ prema Tvrđenju 7 nula-niz, sledi da je niz $(a_n + b_n)_{n\in N}$ konvergentan i da je njegova granična vrednost $a + b$.

b) Slično je

$$a_n - b_n = (a + \alpha_n) - (b + \beta_n) = a - b + (\alpha_n - \beta_n),$$

gde je $(\alpha_n - \beta_n)$ prema Tvrđenju 7 nula-niz, pa sledi da je niz $(a_n - b_n)_{n\in N}$ konvergentan i da je njegova granična vrednost $a - b$.

c) Imamo da je

$$a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n).$$

Kako su $(b\alpha_n)_{n\in N}$, $(a\beta_n)_{n\in N}$ i $(\alpha_n\beta_n)_{n\in N}$ prema Tvrđenju 8, odnosno Posledici 1, nula-nizovi i kako je $(b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n)_{n\in N}$ prema Tvrđenju 7, takođe nula niz, sledi da je niz $(a_n b_n)_{n\in N}$ konvergentan i da je njegova granična vrednost ab.

d) Imamo da je

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} = \frac{a}{b} + \frac{1}{b(b + \beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n) = \frac{a}{b} + \frac{1}{bb_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Kako je niz $\left(\frac{1}{bb_n}(b\alpha_n - a\beta_n)\right)_{n\in N}$, prema Tvrđenju 8, nula niz, jer je proizvod ograničenog niza $\left(\frac{1}{bb_n}\right)_{n\in N}$ i nula-niza $(b\alpha_n - a\beta_n)_{n\in N}$, sledi da je niz $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in N}$ konvergentan i da mu je granična vrednost $\frac{a}{b}$.

Ovim je tvrđenje dokazano.

U prethodnom tvrđenju razmatrani su konvergentni nizovi, tj. nizovi koji imaju konačnu graničnu vrednost. Postavlja se pitanje da li zaključci tvrđenja ostaju na snazi ako su nizovi $(a_n)_{n\in N}$ i $(b_n)_{n\in N}$ divergentni u užem smislu, tj. ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty\ (-\infty)$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty\ (-\infty)$. Ako je, na primer, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, tada primenom Tvrđenja 10 dobijamo da je

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = (+\infty) - (+\infty) = \infty - \infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{+\infty}{+\infty} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Kao što se vidi, neposrednom primenom pravila b) i d) nismo dobili granične vrednosti razlike i količnika nizova (a_n) i (b_n), već smo dobili tzv. *neodređene izraze*: $\infty - \infty$ i $\dfrac{\infty}{\infty}$. Neodređeni izrazi su i $0 \cdot \infty$, koji dobijamo primenom pravila c) u slučaju kad je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, i $\dfrac{0}{0}$, koji dobijamo primenom pravila d) u slučaju kad je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Oznake: $\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ i $\dfrac{0}{0}$ su simboličke i ne definišu operacije. Njima se samo naznačava kako se ponaša opšti član niza kad $n \to +\infty$. U ovakvim slučajevima granična vrednost niza nalazi se podesnom identičnom transformacijom opšteg člana, a zatim primenom određenih pravila koja dovode do rezultata.

Pokazaćemo to na primerima.

Primer 12. Naći $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 4n - 6}$.

Neposrednom primenom pravila d) prethodnog tvrđenja dobili bismo neodređen izraz oblika $\dfrac{\infty}{\infty}$. Međutim, ako brojilac i imenilac podelimo sa n^2, a zatim primenimo prethodno tvrđenje, dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 4n - 6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{5}{n^2}}{3 + \dfrac{4}{n} - \dfrac{6}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 + \dfrac{4}{n} - \dfrac{6}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} + \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} - \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{2}{3}.$$

Primer 13. Naći $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2 + 5n + 2} - n)$.

Neposrednom primenom tačke b) prethodnog tvrđenja dobili bismo neodređen izraz oblika $\infty - \infty$, pa pribegavamo transformacijama. Biće:

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2 + 5n + 2} - n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 5n + 2} - n)(\sqrt{n^2 + 5n + 2} + n)}{\sqrt{n^2 + 5n + 2} + n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5n + 2}{\sqrt{n^2 + 5n + 2} + n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5 + \dfrac{2}{n}}{\sqrt{1 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{2}{n^2}} + 1} = \frac{5}{2}.$$

Navedimo sada neke karakteristične primere limesa nizova.

Primer 14. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$.

1° Ako je $a = 1$, tada imamo konstantan niz čiji je svaki član jednak 1, pa je i njegova granična vrednost jednaka 1.

2° Ako je $a > 1$, tada je $\sqrt[n]{a} > 1$, pa možemo staviti $\sqrt[n]{a} = 1+\alpha_n$, gde je $\alpha_n > 0$ za svako $n \in N$. Sledi $a = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n$. Kako su svi sabirci na desnoj strani poslednje jednakosti pozitivni, sledi da je $a > 1 + n\alpha_n$, tj. $n\alpha_n < a - 1$, odnosno $0 < \alpha_n < \dfrac{a-1}{n}$. Zbog $\dfrac{a-1}{n} \to 0$ $(n \to +\infty)$, na osnovu Tvrđenja 6, sledi da i $\alpha_n \to 0$ $(n \to +\infty)$, pa na osnovu Tvrđenja 9 i $\sqrt[n]{a} \to 1$ $(n \to +\infty)$.

3° Ako je $0 < a < 1$, tada je $a = \dfrac{1}{b}$, gde je $b > 1$, pa je $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}$. Kako prema 2° $\sqrt[n]{b} \to 1$ $(n \to +\infty)$, to i $\sqrt[n]{a} \to 1$ $(n \to +\infty)$.

Primer 15. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Kako je $\sqrt[n]{n} > 1$ za $n > 1$, možemo staviti $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, gde je $\alpha_n > 0$ za svako $n > 1$. Sledi $n = (1+\alpha_n)^n$, tj.

$$n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n.$$

Kako su svi sabirci na desnoj strani pozitivni, sledi da je

$$n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2,$$

tj.

$$\alpha_n^2 < \frac{2}{n-1},$$

odnosno

$$0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

ili

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

S obzirom na to da $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \to 0$ $(n \to +\infty)$, na osnovu Tvrđenja 6, sledi da $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to \infty)$, odnosno na osnovu Tvrđenja 9, da $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to +\infty)$.

Primer 16. Dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{ako je} \quad |q| < 1 \\ 1 & \text{ako je} \quad q = 1 \\ +\infty & \text{ako je} \quad q > 1. \end{cases}$$

1° Ako je $|q| < 1$, tada možemo staviti $|q| = \dfrac{1}{1+h}$, gde je $h > 0$, pa je

$$|q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{1 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n} < \frac{1}{1+nh}.$$

Kako $\dfrac{1}{1+nh} \to 0$ $(n \to +\infty)$, to i $|q|^n \to 0$ $(n \to +\infty)$, a time i $q^n \to 0$ $(n \to +\infty)$.

2° Ako je $q = 1$, tada očigledno $1^n \to 1$ $(n \to +\infty)$

3° Ako je $q > 1$, tada možemo staviti $q = 1 + h$, gde je $h > 0$, pa je

$$q^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \cdots + h^n > nh.$$

Kako $nh \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, to i $q^n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

Primer 17. Naći graničnu vrednost niza čiji je opšti član $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$ $(a > 0)$.

1° Ako je $0 < a \leq 1$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ na osnovu prethodnog primera.

2° Ako je $a > 1$, tada postoji prirodan broj m, takav da je $m \leq a < m + 1$, tj. $\dfrac{a}{m+1} < 1$. Za $n > m$ je

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \cdot \frac{a}{m+1} \cdot \frac{a}{m+2} \cdots \frac{a}{n}.$$

Kako je

$$\frac{a}{m+2} < \frac{a}{m+1}, \cdots, \frac{a}{n} < \frac{a}{m+1},$$

sledi da je

$$\frac{a^n}{n!} < \frac{a^m}{m!}\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m}.$$

Zbog $\dfrac{a}{m+1} < 1$, $\left(\dfrac{a}{m+1}\right)^{n-m} \to 0$ $(n \to +\infty)$, pa je i

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Za nalaženje granične vrednosti niza $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in N}$ koristi se i sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 11 (*Štolcova*[21] *teorema*). Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ i ako je za svako $n \in N$ ili počev od nekog $n \in N$ $b_{n+1} > b_n$, tada je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

ako postoji limes na desnoj strani (konačan ili beskonačan).

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je limes na desnoj strani konačan, tj. da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l.$$

[21] O. Stolz, nemački matematičar.

Ovo znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$, tako da je

$$\left|\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

za svako $n > n_0$. Sledi da relaciju (3) zadovoljavaju izrazi:

$$\frac{a_{n_0+1} - a_{n_0}}{b_{n_0+1} - b_{n_0}}, \frac{a_{n_0+2} - a_{n_0+1}}{b_{n_0+2} - b_{n_0+1}}, \ldots, \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{b_{n-1} - b_{n-2}}, \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

S obzirom na to da su imenioci gornjih razlomaka pozitivni, sledi da relaciju (3) zadovoljava i izraz

$$\frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}},$$

čiji je brojilac jednak zbiru brojilaca, a imenilac zbiru imenilaca gornjih izraza. Dakle, za $n > n_0$ je

$$\left|\frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Iz jednakosti

$$\frac{a_n}{b_n} - l = \frac{a_{n_0} - l b_{n_0}}{b_n} + \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\right)\left(\frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - l\right),$$

koja se može neposredno proveriti, sledi

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| \leq \left|\frac{a_{n_0} - l b_{n_0}}{b_n}\right| + \left|\frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - l\right|.$$

Drugi sabirak je $< \dfrac{\varepsilon}{2}$ za $n > n_0$. Zbog toga što $b_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ i prvi sabirak će biti $< \dfrac{\varepsilon}{2}$ za $n > n_1$. Možemo uzeti da je $n_1 > n_0$, pa je za $n > n_1$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,$$

što je i trebalo dokazati.

Neka je sada

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = +\infty,$$

Sledi da je za velike $n \in N$

$$a_n - a_{n-1} > b_n - b_{n-1},$$

pa iz toga što $b_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ sledi da i $a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, kao i da je počev od nekog indeksa $a_{n+1} > a_n$. Ako sada posmatramo niz $\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)_{n\in N}$ i na njega primenimo već dokazani slučaj, tada dobijamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = 0,$$

odakle sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty,$$

što je i trebalo dokazati.

Primer 18. Ako postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ (konačan ili beskonačan), dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Primenom Štolcove teoreme za $a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ i $b_n = n$ dobijamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})}{n - (n-1)} = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Na primer, ako znamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, tada je i

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

Primer 19. Naći $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^5 + 2^5 + \cdots + n^5}{n^6}$.

Primenom Štolcove teoreme za $a_n = 1^5 + 2^5 + \cdots + n^5$ i $b_n = n^6$ dobijamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^5 + 2^5 + \cdots + n^5}{n^6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5) - (1^5 + 2^5 + \cdots + (n-1)^5)}{n^6 - (n-1)^6}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5}{6n^5 - 15n^2 + 20n^3 - 15n^2 + 6n - 1} = \frac{1}{6}.$$

V POGLAVLJE

GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJE

1. GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE

1.1. Pojam granične vrednosti funkcije

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana na skupu D i neka je a tačka nagomilavanja skupa D. Interesuje nas ponašanje vrednosti funkcije $y = f(x)$ za vrednosti argumenta koje su bliske tački a, tj. interesuje nas da li vrednosti funkcije $y = f(x)$ teže nekoj tački b kad vrednosti argumenta teže tački a.

Definicija 1. Tačka (broj) b je *granična vrednost* ili *granica* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ (ili kad x teži a) ako za svaki pozitivan broj ε postoji pozitivan broj δ, koji zavisi od ε, tako da je za sve vrednosti argumenta x koje zadovoljavaju nejednakost $0 < |x - a| < \delta$, zadovoljena nejednakost $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Piše se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

ili

$$f(x) \to b \quad \text{kad} \quad x \to a.$$

Tačka a naziva se *granična tačka*.

Sadržaj Definicije 1 može se zapisati na sledeći način:

$$b = \lim_{x \to a} f(x) \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Umesto $0 < |x - a| < \delta$ pisaćemo i $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, a umesto $|f(x) - b| < \varepsilon$, $b - \varepsilon < f(x) < b + f(x)$ ili $f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Vidi sl. 1.

Primer 1. Dokazati da je

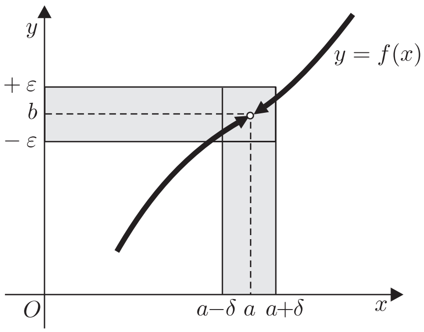
$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) = 1.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Sledi niz ekvivalentnih nejednakosti

$$\left|\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 1\right| < \varepsilon,$$

$$\frac{|x-4|}{2} < \varepsilon,$$

$$|x-4| < 2\varepsilon.$$



sl. 1

Ako uzmemo da je $\delta = 2\varepsilon$ (ili bilo koji pozitivan broj manji od 2ε), tada za sve vrednosti argumenta x za koje je $0 < |x-4| < \delta$ sledi da je $\left|\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 1\right| < \varepsilon$. Ovo upravo znači da je $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 1$.

Primer 2. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Primetimo da funkcija $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ nije definisana u tački $x = 1$ i da je $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-2} = x + 1$ $(x \neq 1)$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Tada je

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \iff |x + 1 - 2| < \varepsilon \iff |x-1| < \varepsilon \quad (x \neq 1).$$

Ako stavimo $\delta = \varepsilon$, tada za sve vrednosti promenljive x, za koje je $0 < |x-1| < \delta$ važi $|f(x) - 2| < \varepsilon$, što i znači da je $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

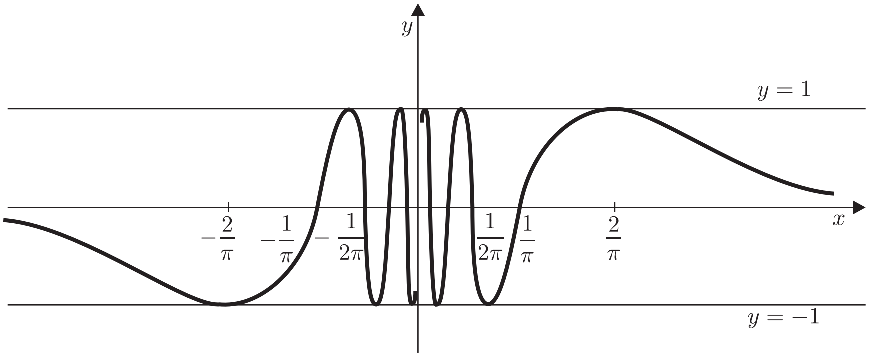
Dajemo još jednu definiciju granične vrednosti funkcije.

Definicija 2. Tačka (broj) b je *granična vrednost* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ ako za svaki niz $(x_n)_{n\in N}$ vrednosti argumenta x, koji konvergira ka a i $x_n \neq a$ $(n \in N)$, odgovarajući niz $(f(x_n))_{n\in N}$ vrednosti funkcije konvergira ka b.

Primer 3. Koristeći Definiciju 2 pokazati da funkcija $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ nema graničnu vrednost u tački $x = 0$.

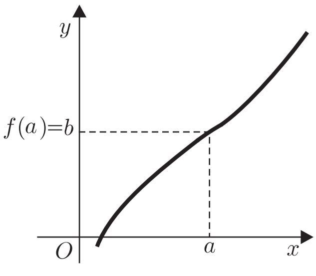
Grafik funkcije dat je na sl. 2. Funkcija nema graničnu vrednost u tački $x = 0$ zato što, na primer, niz $(x_n)_{n\in N}$, gde je $x_n = \dfrac{2}{(2n-1)\pi}$, konvergira ka nuli, dok odgovarajući niz vrednosti funkcije $(f(x_n))_{n\in N}$, gde je $f(x_n) = (-1)^n$, nema graničnu vrednost.

Na sl. 1 grafički je predstavljena funkcija $y = f(x)$ koja ima graničnu vrednost b u tački $x = a$ u kojoj nije definisana.

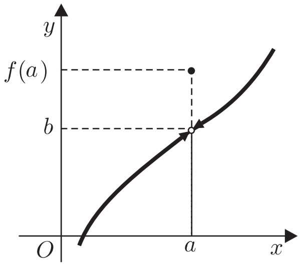


sl. 2

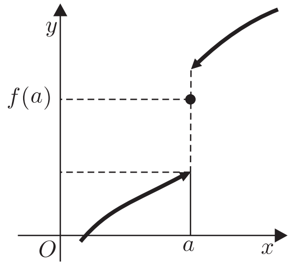
Na sl. 3 grafički je predstavljena funkcija $y = f(x)$ čija je granična vrednost b u tački $x = a$ jednaka vrednosti funkcije u toj tački, tj. $f(a) = b$.



sl. 3



sl. 4



sl. 5

Na sl. 4 grafički je predstavljena funkcija $y = f(x)$ koja je definisana u tački $x = a$, ima graničnu vrednost b u tački $x = a$ i pri tome je $f(a) \neq b$.

Najzad, na sl. 5 grafički je predstavljena funkcija $y = f(x)$ koja je definisana u tački $x = a$, ali nema graničnu vrednost u toj tački.

Iako to sledi iz definicije granične vrednosti funkcije, ipak podvucimo da ne treba mešati graničnu vrednost funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$, tj. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ i vrednost $f(a)$, tj. vrednost funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$.

Primer 4. Granična vrednost konstante $f(x) = C$ u proizvoljnoj tački $a \in R$ jednaka je C.

Zaista, za dato $\varepsilon > 0$ možemo uzeti da je δ proizvoljan pozitivan broj. Tada za svako x, takvo da je $0 < |x - a| < \delta$ je

$$|f(x) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{x\to a} C = C.$$

Primer 5. Granična vrednost identične funkcije $f(x) = x$ u proizvoljnoj tački $a \in R$ je a.

Naime, za dato $\varepsilon > 0$ možemo uzeti da je δ broj za koji važi: $0 < \delta \leq \varepsilon$. Tada za $0 < |x - a| < \delta$ je

$$|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

1.2. Leva i desna granična vrednost funkcije

Definicija 3. Broj b_l je *leva granična vrednost* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ ako za svaki pozitivan broj ε postoji pozitivan broj δ, tako da je za sve vrednosti x iz intervala $(a - \delta, a)$ zadovoljena nejednakost $|f(x) - b_l| < \varepsilon$.

Broj b_d je *desna granična vrednost* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ ako za svaki pozitivan broj ε postoji pozitivan broj δ, tako da je za sve vrednosti x iz intervala $(a, a + \delta)$ zadovoljena nejednakost $|f(x) - b_d| < \varepsilon$.

Piše se

$$b_l = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{ili} \quad b_l = \lim_{x \to a - 0} f(x) \quad \text{ili} \quad b_l = f(a - 0),$$

$$b_d = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{ili} \quad b_d = \lim_{x \to a + 0} f(x) \quad \text{ili} \quad b_d = f(a + 0).$$

Vidi sl. 6.

Leva i desna granična vrednost funkcije $y = f(x)$ u nuli označava se na sledeći način: $f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} f(x)$, $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} f(x)$.

Leva i desna granična vrednost funkcije mogu se definisati i pomoću nizova.

Definicija 4. Broj b_l je *leva granična vrednost* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ ako za svaki niz $(x_n)_{n \in N}$, takav da $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ i $x_n < a$ $(n \in N)$, $f(x_n) \to b_l$ $(n \to +\infty)$.

Broj b_d je *desna granična vrednost* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ ako za svaki niz $(x_n)_{n \in N}$, takav da $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ i $x_n > a$ $(n \in N)$, $f(x_n) \to b_d$ $(n \to +\infty)$.

Primer 6. Ako je

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{ako je} \quad x > 0 \\ 0 & \text{ako je} \quad x = 0 \\ -1 & \text{ako je} \quad x < 0, \end{cases}$$

Naći $f(+0)$ i $f(-0)$.

Funkcija je grafički predstavljena na sl. 7.

VI POGLAVLJE

IZVODI I DIFERENCIJALI

1. IZVODI

1.1. Pojam prvog izvoda funkcije

Definicija 1. Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke x_0 i neka je $\triangle x$ priraštaj nezavisno promenljive x_0, tako da i tačka $x_0 + \triangle x$ pripada toj okolini. Granična vrednost

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x},$$

ukoliko postoji, naziva se *prvi izvod* funkcije $y = f(x)$ u tački x_0.

Ako je

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = +\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = -\infty,$$

tada kažemo da funkcija $y = f(x)$ u tački x_0 ima *beskonačan prvi izvod* koji je jednak $+\infty$, odnosno $-\infty$.

Kad kažemo da funkcija ima prvi izvod, podrazumevaćemo da ima konačan prvi izvod.

Napomenimo da se prvi izvod (ili vrednost prvog izvoda) funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 može definisati i na sledeći način: ako je funkcija $y = f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke x_0 i ako je x proizvoljna tačka te okoline, tada je granična vrednost

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ukoliko postoji, prvi izvod (vrednost prvog izvoda) funkcije $y = f(x)$ u tački x_0.

Ako funkcija $y = f(x)$ ima izvod u svakoj tački $x \in X$, tada se njen izvod y', odnosno $f'(x)$ može razmatrati kao funkcija od x, definisana na skupu X.

Primer 1. Izvod konstante $y = C$ u proizvoljnoj tački $x \in R$ jednak je nuli. Naime,

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{0}{\triangle x} = 0.$$

Primer 2. Izvod funkcije $y = x$ u proizvoljnoj tački $x \in R$ jednak je 1. Naime,

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle x} = 1.$$

Primer 3. Izvod funkcije $y = \sqrt[3]{x^2}$ je

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(x+\triangle x)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{\triangle x} =$$
$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x+\triangle x)^2 - x^2}{\triangle x(\sqrt[3]{x+\triangle x)^4} + \sqrt[3]{x^2(x+\triangle x)^2} + \sqrt[3]{x^4})}$$
$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x(2x+\triangle x)}{3\triangle x\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad (x \neq 0).$$

1.2. Levi i desni izvod funkcije

Definicija 2. Leva (desna) granična vrednost

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\triangle x \to -0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \left(f'_{+}(x) = \lim_{\triangle x \to +0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \right)$$

naziva se *levi (desni) izvod* funkcije $y = f(x)$ u tački x_0.

Ako funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x_0, tada ona u toj tački ima i desni i levi izvod koji su jednaki. Obrnuto, ne mora da bude tačno.

Primer 4. Funkcija $f(x) = |x|$ ima desni i levi izvod u tački $x = 0$. Zaista,

$$f'_{+}(0) = \lim_{\triangle x \to +0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to +0} \frac{(0+\triangle x) - 0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to +0} \frac{\triangle x}{\triangle x} = 1,$$
$$f'_{-}(0) = \lim_{\triangle x \to -0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to -0} \frac{-(0+\triangle x) - 0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to -0} \frac{-\triangle x}{\triangle x} = -1.$$

Kako je $f'_{+}(0) \neq f'_{-}(0)$, to znači da ne postoji $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$, tj. ne postoji prvi izvod funkcije u tački $x = 0$.

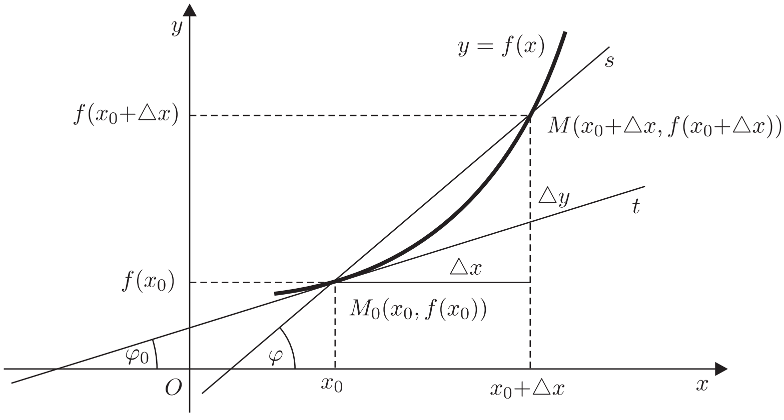
Iz tvrđenja o levoj i desnoj graničnoj vrednosti (Tvrđenje 1, odeljak 1.2, V poglavlje) sledi da funkcija, definisana u nekoj okolini tačke x_0, ima prvi izvod $f'(x_0)$ *akko* postoje $f'_{-}(x_0)$ i $f'_{+}(x_0)$ i $f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$. Tada je $f'(x_0) = f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$.

1.3. Geometrijski smisao prvog izvoda

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke x_0 i neka je u x_0 neprekidna. Neka tačka $x_0 + \triangle x$ pripada toj okolini i neka su $f(x_0)$ i $f(x_0 + \triangle x)$ vrednosti funkcije $y = f(x)$ redom u tačkama x_0 i $x_0 + \triangle x$.

Koeficijent pravca sečice s grafika funkcije $y = f(x)$ koja prolazi kroz tačke $M_0(x_0, f(x_0))$ i $M(x_0 + \triangle x, f(x_0 + \triangle x))$ je

$$k_s = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_0+\triangle x) - f(x_0)}{\triangle x},$$



sl. 1

gde je φ ugao koji sečica obrazuje sa osom Ox (sl. 1).

Kad $\triangle x \to 0$, tada zbog neprekidnosti funkcije u tački x_0 i $\triangle y \to 0$, pa tačka M teži tački M_0, čime nastaje granični položaj sečice koji nazivamo tangenta grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $M_0(x_0, f(x_0))$. Njen koeficijent pravca je

$$k_t = \operatorname{tg}\varphi_0 = f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x},$$

gde je φ_0 ugao koji tangenta t obrazuje sa osom Ox.

Dakle, *prvi izvod funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 jednak je koeficijentu pravca tangente t grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $M_0(x_0, f(x_0))$.*

Ako je $f'(x_0)$ konačan, tj. realan broj, tada je jednačina tangente

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ako je $f'(x_0) = +\infty$ ili $f'(x_0) = -\infty$, tada je jednačina tangente $t : x = x_0$. Vidi sl. 2 a, b.

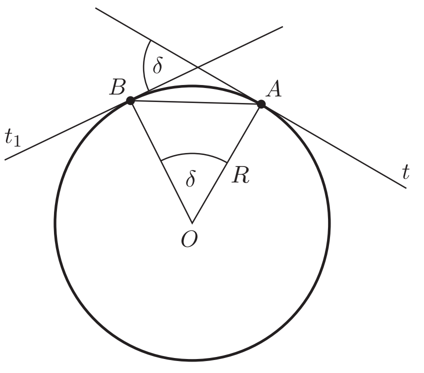
Napominjemo da i u slučaju kad je $f'_-(x_0) = -\infty$, $f_+(x_0) = +\infty$ ili $f'_-(x_0) = +\infty$, $f_+(x_0) = -\infty$, dakle, kad ne postoji ni konačan ni beskonačan prvi izvod funkcije $y = f(x)$ u tački x_0, postoji tangenta grafika funkcije u tački $M_0(x_0, f(x_0))$ čija je jednačina takođe $x = x_0$ (sl. 3 a, b).

Istaknimo još da je levi (desni) izvod funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 jednak koeficijentu pravca leve (desne) tangente grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $M_0(x_0, f(x_0))$ (sl. 4). U gore razmatranom slučaju, kad su levi i desni izvod fukcije $y = f(x)$ u tački x_0 beskonačni, ali različitog znaka, leva i desna tangenta grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $M_0(x_0, f(x_0))$ se poklapaju.

Definicija 15. Količnik

$$K_{sr} = \frac{\delta}{\Delta l},$$

gde je $\triangle l$ dužina luka $\widehat{MM_1}$[32]), a ugao δ je dat u radijanima, naziva se *srednja krivina* luka $\widehat{MM_1}$.



sl. 35

Kao što se vidi, srednja krivina K_{sr} luka $\widehat{MM_1}$ zavisi i od dužine luka $\widehat{MM_1}$ i od ugla δ, što znači da dva luka iste dužine jedne krive mogu imati različite srednje krivine.
Da bismo dobili bolju predstavu o stepenu zakrivljenosti krive, uvodimo pojam krivine krive u datoj tački.

Definicija 16. *Krivina* K krive C u tački M je granična vrdnost srednje krivine luka $\widehat{MM_1}$ kada dužina $\triangle l$ luka $\widehat{MM_1}$ teži nuli, odnosno kada se tačka M_1 po krivoj C približava tački M, dakle,

$$K = \lim_{\triangle l \to 0} \frac{\delta}{\triangle l}.$$

Po definiciji je $K \geq 0$.

Primer 44. Kod prave za svake dve tačke M i M_1 je $\delta = 0$, pa je i $K_{sr} = 0$ i $K = 0$.

Primer 45. Kod kruga poluprečnika R srednja krivina luka $\widehat{AB}$ koji odgovara centralnom uglu δ je (vidi sl. 35)

$$K_{sr} = \frac{\delta}{\widehat{AB}} = \frac{\delta}{R\delta} = \frac{1}{R},$$

pa je i krivina u tački A

$$K = \frac{1}{R}.$$

Dakle, srednja krivina luka kruga poluprečnika R ne zavisi od dužine luka, već je za svaki luk jednaka $\frac{1}{R}$. Isto tako, krivina kruga u datoj tački ne zavisi od izbora te tačke, već je u svakoj tački jednaka $\frac{1}{R}$.

Pokažimo još jedno svojstvo koje važi za krug, a to je da je granična vrednost količnika dužine luka $\widehat{AB}$ i dužine tetive AB jednaka 1 kad dužina

---

[32]) Formula za izračunavanje dužine luka krive data je u VIII poglavlju.

tetive teži nuli, odnosno kad tačka B po krugu teži tački A ili, što je isto, kad odgovarajući centralni ugao δ teži nuli. Zaista,

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\widehat{AB}}{\overline{AB}}=\lim_{\delta\to 0}\frac{R\delta}{2R\sin\dfrac{\delta}{2}}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\dfrac{\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}=1.$$

Napomenimo da ovo svojstvo važi, pod određenim uslovima, i za proizvoljnu krivu, ali ga ovde nećemo dokazivati, ali ćemo ga koristiti.

Neka je C kriva u ravni zadata jednačinom $y=f(x)$, neka je $M_0(x_0,y_0)$ fiksirana, a $M(x,y)$ promenljiva tačka krive C. Označimo sa l dužinu luka $\widehat{M_0M}$. Neka je $\triangle x$ priraštaj od x i neka je M_1 tačka krive čija je apscisa $x+\triangle x$. Tada i l dobija priraštaj $\triangle l$ koji je jednak dužini luka $\widehat{MM_1}$ (sl. 36). Neka je $\overline{MM_1}$ tetiva koja odgovara luku $\widehat{MM_1}$. Iz $\triangle MPM_1$ (vidi sliku 36) sledi

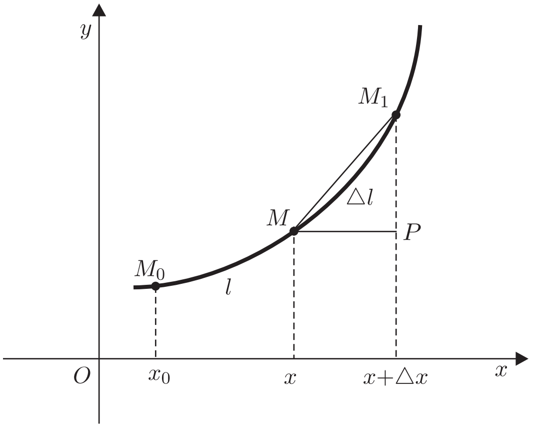
$$\overline{MM_1}^2=(\triangle x)^2+(\triangle y)^2,$$

tj.

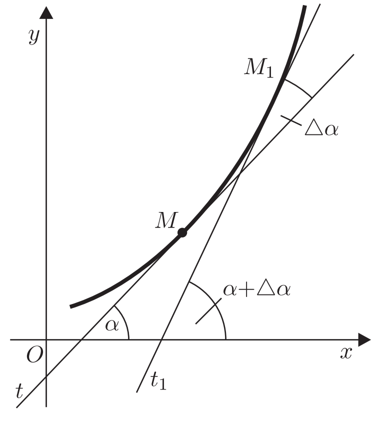
$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\triangle l}\right)^2\cdot(\triangle l)^2=(\triangle x)^2+(\triangle y)^2,$$

odnosno

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\triangle l}\right)^2\left(\frac{\triangle l}{\triangle x}\right)^2=1+\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2.$$



sl. 36



sl. 37

Prelaskom na graničnu vrednost kad $\triangle x \to 0$, uzimajući u obzir da je $\lim\limits_{\overline{MM_1}\to 0} \dfrac{\overline{MM_1}}{\triangle l} = 1$, dobijamo da je

$$\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

odnosno

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+y'^2}, \tag{53}$$

odakle sledi da je *diferencijal luka*

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1+y'^2}dx, \tag{54}$$

ili

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Pokažimo sada kako se nalazi krivina krive C zadate jednačinom $y = f(x)$ u tački $M(x, y)$. Pretpostavimo da funkcija $y = f(x)$ ima neprekidan drugi izvod $f''(x)$.

Neka tangenta t krive C u tački M obrazuje ugao α, a tangenta t_1 krive C u tački M_1 ugao $\alpha + \triangle\alpha$ sa pozitivnim delom ose Ox (sl. 37).

Srednja krivina luka $\widehat{MM_1}$ je

$$K_{sr} = \left|\frac{\triangle\alpha}{\triangle l}\right|$$

($\triangle\alpha$ može biti i negativno), a krivina krive C u tački $M(x, y)$ je

$$K = \lim_{\triangle l \to 0}\left|\frac{\triangle\alpha}{\triangle l}\right| = \left|\frac{d\alpha}{dl}\right|.$$

Za izračunavanje $\dfrac{d\alpha}{dl}$ možemo koristiti formulu za nalaženje izvoda parametarski zadane funkcije (parametar je x), tj.

$$\frac{d\alpha}{dl} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dx}}{\dfrac{dl}{dx}}.$$

Kako je $\operatorname{tg}\alpha = y'$, to je $\alpha = \operatorname{arc\,tg} y'$, pa je

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2},$$

a kako je, prema (54),

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1+y'^2},$$

sledi da je

$$\frac{d\alpha}{dl} = \frac{\dfrac{y''}{1+y'^2}}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

pa je

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{55}$$

Nije teško videti da u slučaju kad je kriva C zadata parametarskim jednačinama: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, formula (55) ima oblik

$$K = \frac{|x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t|}{(x_t'^2 + y_t'^2)^{3/2}}. \tag{56}$$

Ako je kriva C zadata polarnom jednačinom $\rho = \rho(\varphi)$, tada ako u formulama

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

umesto ρ stavimo $\rho(\varphi)$, dobijamo parametarske jednačine krive C

$$C: \begin{array}{l} x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \end{array} \tag{57}$$

gde φ ima ulogu parametra. Diferenciranjem jednačina (57) po φ dobijamo

$$x'_\varphi = \rho'_\varphi\cos\varphi - \rho\sin\varphi, \quad y'_\varphi = \rho'_\varphi\sin\varphi + \rho\cos\varphi.$$

Daljim diferenciranjem, a zatim zamenom izvoda u (56), dobijamo da je

$$K = \frac{|\rho^2 + 2\rho_\varphi'^2 - \rho\rho''_{\varphi\varphi}|}{(\rho^2 + \rho_\varphi'^2)^{3/2}}. \tag{58}$$

Primer 46. Naći krivinu krive $y = x^3$ u tački $M(1,1)$.

Kako je $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y'(1) = 3$, $y''(1) = 6$, krivina krive u tački $M(1,1)$ je

$$K = \frac{6}{(1+3^2)^{3/2}} = \frac{6}{10^{3/2}} = \frac{3\sqrt{10}}{50}.$$

Primer 47. Naći krivinu elpise $x^2 + 4y^2 = 4$ u tački $M(0,1)$.

Parametarske jednačine elipse su

$$x = 2\cos t, \quad y = \sin t \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Tačka $M(0,1)$, tj. $x = 0$ i $y = 1$, dobija se za $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Kako je

$$x'_t = -2\sin t, \quad y'_t = cost,$$
$$x''_{tt} = -2\cos t, \quad y''_{tt} = -\sin t,$$

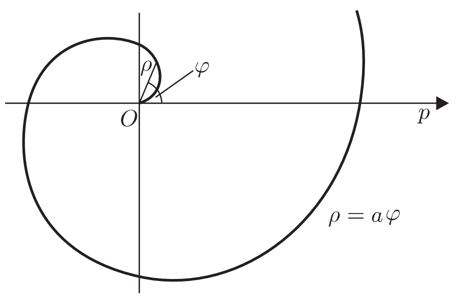
i

$$x'_t\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad y'_t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$
$$x''_{tt}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y''_{tt}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

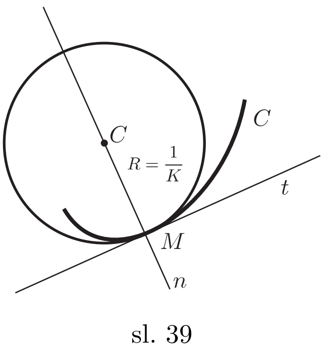
krivina elipse u tački $M(0,1)$ je

$$K = \frac{|-2\cdot(-1)|}{((-2)^2 + 0^2)^{3/2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Primer 48. Naći krivinu *Arhimedove spirale* $\rho = a\varphi$ $(a > 0)$ u proizvoljnoj tački (sl. 38).



sl. 38



sl. 39

Kako je

$$\rho' = a, \quad \rho'' = 0,$$

to je

$$K = \frac{|a^2\varphi^2 + 2a^2|}{(a^2\varphi^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\varphi^2 + 2}{a(\varphi^2 + 1)^{3/2}}$$

Definicija 17. Ako je K krivina krive C u tački M, tada je

$$R = \frac{1}{K}, \tag{59}$$

tj.

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} \tag{59'}$$

poluprečnik krivine krive C u tački M.

Definicija 18. Krug k poluprečnika $R = \dfrac{1}{K}$ koji prolazi kroz tačku M krive C u kojoj kriva C ima krivinu K, a centar C mu je na normali n krive C u tački M sa udubljene strane krive C, naziva se *krug krivine krive* C u tački M. Centar C kruga krivine naziva se *centar krivine krive* C u tački M (vidi sl. 39).

Iz definicije sledi da krug krivine u tački M krive C i kriva C imaju istu krivinu K u toj tački.

Definicija 19. Geometrijsko mesto centra kruga krivine krive C naziva se *evoluta* krive C, dok je kriva C njena *evolventa*.

Nađimo formule za izračunavanje koordinata centra (kruga) krivine, tj. nađimo jednačinu evolute date krive.

Neka je kriva C zadata jednačinom $y = f(x)$ i neka je tačka $C(X, Y)$ centar krivine krive C u tački $M(x, y)$.

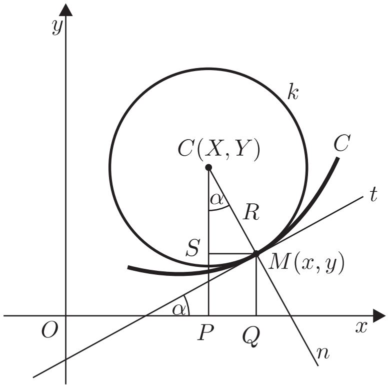
Ako je $y'' > 0$, tada je, prema oznakama na sl. 40,

$$\begin{aligned} X &= OQ - PQ = x - R\sin\alpha, \\ Y &= QM + SC = y + R\cos\alpha. \end{aligned} \tag{60}$$

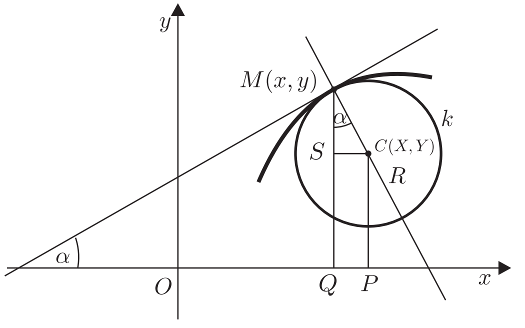
Kako je

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

i $R = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$, iz (60) dobijamo formule za izračunavanje koordinata



sl. 40



sl. 41

centra krivine:

$$
\begin{aligned}
X &= x - \frac{y'}{y''}(1 + {y'}^2),\\
Y &= y + \frac{1}{y''}(1 + {y'}^2).
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Ako je $y'' < 0$, tada je, prema oznakama na sl. 41,

$$
\begin{aligned}
X &= OQ + QP = x + R\sin\alpha,\\
Y &= QM - SM = y - R\cos\alpha.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Ako u (62) $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ zamenimo pomoću gornjih formula, a stavimo da je $R = \dfrac{(1 + {y'}^2)^{3/2}}{-y''}$, dobićemo opet formule (61).

Napomenimo da je i na sl. 40 i 41 prikazan slučaj $y' > 0$. Slučaj $y' < 0$ razmatra se analogno i takođe se dobijaju formule (61).

Ako je kriva C zadata parametarskim jednačinama: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, tada zamenom izvoda y' i y'' u (61) pomoću formula

$$
y' = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y'' = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{{x'_t}^3},
$$

dobijamo

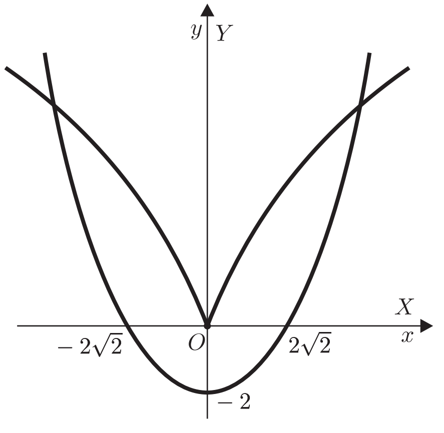
$$
\begin{aligned}
X &= x - \frac{y'_t({x'_t}^2 + {y'_t}^2)}{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t},\\
Y &= y + \frac{x'_t({x'_t}^2 + {y'_t}^2)}{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}.
\end{aligned}
\tag{61'}
$$

Jednačine (61), odnosno (61') su parametarske jednačine evolute krive C, s tim što je u (61) x parametar, a u (61') parametar je t.

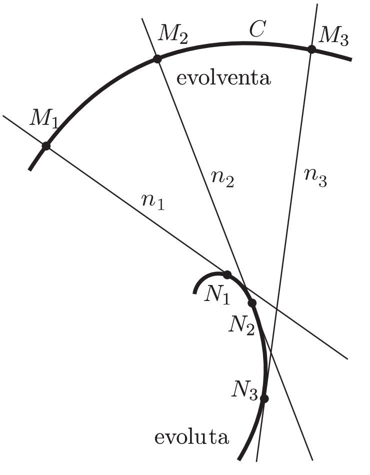
Primer 49. Naći jednačinu kruga krivine grafika funkcije $y = e^x$ u tački $M(0,1)$.

Kako je $y' = e^x$, $y'' = e^x$, $y'(0) = 1$, $y''0) = 1$, primenom formula (61) nalazimo koordinate centra kruga $x_0 = -2$, $y_0 = 3$, a primenom formule (59'), poluprečnik $R = 2\sqrt{2}$, pa je tražena jednačina

$$k : (x+2)^2 + (y-3) = 8.$$



sl. 42



sl. 43

Primer 50. Naći jednačinu evolute parabole $\mathcal{P} : y = \dfrac{1}{4}x^2 - 2$.

Zamenom izvoda $y' = \dfrac{x}{2}$ i $y'' = \dfrac{1}{2}$ u formulama (61) dobijamo parametarske jednačine evolute parabole:

$$X = -\frac{x^3}{4},$$
$$Y = \frac{3x^2}{4} \quad (x \in R).$$

Eliminacijom parametra x dobijamo jednačinu evolute u obliku

$$Y^3 = \frac{27}{4}X^2, \text{ tj. } Y = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{X^2}.$$

Vidi sl. 42.

Na kraju, napomenimo da se može pokazati da je normala krive C u proizvoljnoj tački tangenta evolute te krive (sl. 43).

VII POGLAVLJE

NEODREĐENI INTEGRAL

1. POJAM PRIMITIVNE FUNKCIJE I NEODREĐENOG INTEGRALA

Ovde ćemo razmatrati problem obrnut problemu diferenciranja: tražimo funkciju čiji je izvod, odnosno diferencijal poznat. Sa ovakvim problemom srećemo se u mehanici kada treba naći zakon kretanja materijalne tačke na osnovu poznate brzine, kao i kada na osnovu poznatog ubrzanja materijalne tačke treba naći zakon njenog kretanja i brzine.

Definicija 1. Funkcija $F(x)$ naziva se *primitivna funkcija* funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b)[33] ako je u svakoj tački $x \in (a,b)$ funkcija F diferencijabilna i važi

$$f(x) = F'(x), \quad x \in (a,b),$$

tj.

$$f(x)dx = dF(x), \quad x \in (a,b).$$

Primer 1. a) Funkcija $F(x) = \arcsin x$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ za $x \in (-1,1)$ jer je $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.

b) Funkcija $F(x) = 2\sqrt{x} + 3$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ za $x \in (0,+\infty)$ jer je $(2\sqrt{x}+3)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,+\infty)$.

c) Funkcija $F(x) = \sin x$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \cos x$ za $x \in (-\infty,+\infty)$ jer je $(\sin x)' = \cos x$, $x \in (-\infty,+\infty)$.

Očigledno je, ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b), da je tada i $F(x)+C$, gde je C proizvoljna konstanta, primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na (a,b), jer je

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x), \quad x \in (a,b).$$

---

[33] Primitivna funkcija se može definisati i na segmentu $[a,b]$, pri čemu tada pod primitivnom funkcijom podrazumevamo funkciju $F(x)$ koja ima izvod $F'(x)$ u svakoj unutrašnjoj tački segmenta $[a,b]$ jednaku $f(x)$ i koja pored toga ima desni izvod $F'_+(a)$ jednak $f(a)$ i levi izvod $F'_-(b)$ jednak $f(b)$.

Definicija 2. Skup svih primitivnih funkcija $\{F(x)+C\}$ funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b) naziva se *neodređeni integral* funkcije $f(x)$ i označava se sa

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta koja se naziva integracionom konstantom.

Pri tom je simbol $\int$ integralni znak. Funkcija $f(x)$ naziva se *podintegralna funkcija* ili *integrand*, izraz $f(x)dx$ *podintegralni izraz*, a x promenljiva po kojoj se vrši integracija. Operacija nalaženja primitivne funkcije, odnosno neodređenog integrala funkcije $f(x)$, zove se *integracija* ili *integriranje*.

Krive definisane jednačinom

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in R$$

predstavljaju familiju *integralnih krivih* koje se dobijaju za različite vrednosti konstante C.

2. OSOBINE NEODREĐENOG INTEGRALA

Iz definicije neodređenog integrala neposredno slede sledeće osobine neodređenog integrala.

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$, odnosno $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $\int dF(x) = F(x) + C$.
3. $\int \lambda f(x)dx = \lambda f(x)dx$, $\lambda \in R$ - svojstvo homogenosti.
4. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$ – svojstvo aditivnosti.

3. TABLICA OSNOVNIH NEODREĐENIH INTEGRALA

Pošto je operacija integracije, tj. nalaženja neodređenog integrala inverzna operaciji diferenciranja, svaka formula oblika $F'(x) = f(x)$ može se napisati u obliku integralne formule $\int f(x)dx = F(x) + C$. Na osnovu toga dobijamo tablicu neodređenih integrala neposredno iz tablice izvoda *elementarnih funkcija* (videti str. 173 i 174).

Tablica integrala:

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$.

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$, specijalno, $\int e^x dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. $(k \in Z)$.

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, $x \neq k\pi$ $(k \in Z)$.

8. $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{x^2-1} = \dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{x-1}{x+1} \right| + C$, $|x| \neq 1$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$, $|x| < 1$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$, gde je u slučaju znaka „$-$“, $|x| > 1$.

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.

13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$, $x \neq 0$.

U VI poglavlju (odeljak 1.7) smo pokazali da je izvod ma koje elementarne funkcije takođe elementarna funkcija. Međutim, može se pokazati da integrali nekih elementarnih funkcija nisu elementarne funkcije, kao na primer integrali

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \cos x^2 dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad x > 0, \quad x \neq 1,$$
$$\int \frac{\cos x}{x} dx, \quad x \neq 0, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad x \neq 0, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \ x \neq 0,$$

a takođe i takozvani *eliptički integrali* oblika $\int R(x, \sqrt{P_n(x)}) dx$, gde je R – racionalna funkcija, a $P_n(x)$ polinom stepena $n = 3$ i $n = 4$. Posebno se često sreću eliptički integrali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{i} \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0<k<1.$$

Svi navedeni integrali su funkcije koje nisu elementarne i pri tom igraju važnu ulogu, na primer, u fizici (prvi integral je poznati *Puasonov*[34)] *integral*).

Integrali 1. – 15. dati u tablici obično se nazivaju *tablični integrali.*

Pokažimo na primerima kako se integrali i nešto složenijih funkcija mogu svesti na tablične.

Primer 2. a) $\int \frac{x^3+3x^2+4}{2x}dx = \int \left(\frac{x^3}{2x}+\frac{3x^2}{2x}+\frac{4}{2x}\right)dx = \frac{1}{2}\int x^2dx$
$+\frac{3}{2}\int xdx + 2\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+2\cdot\ln|x|+C = \frac{1}{6}x^3+\frac{3}{4}x^2+2\ln|x|+C.$

b) $\int \frac{2}{(1+x^2)x^2}dx = \int \frac{2+2x^2-2x^2}{(1+x^2)x^2}dx = \int \frac{2(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)x^2}dx =$
$2\int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{2}{x} - 2\operatorname{arc\,tg} x + C;$

c) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx = \int \sqrt{x\sqrt{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}}dx = \int \sqrt{x\cdot x^{\frac{3}{4}}}dx = \int \sqrt{x^{\frac{7}{4}}}dx =$
$\int x^{\frac{7}{8}}dx = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C = \frac{8}{15}x\cdot\sqrt[8]{x^7}+C;$

d) $\int \frac{(1-\cos 2x)^2}{3\sin^2 x\cos^2 x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{4\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \frac{4}{3}\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx =$
$\frac{4}{3}\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \frac{4}{3}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \frac{4}{3}(\operatorname{tg} x - x)+C.$

e) $\int \frac{9^{x-1}+6^{x+1}}{3^x}dx = \int \frac{9^{-1}\cdot 3^{2x}+6\cdot 2^x\cdot 3^x}{3^x}dx = \int (9^{-1}\cdot 3^x + 6\cdot 2^x)dx =$
$\frac{1}{9}\frac{1}{\ln 3}3^x + \frac{6}{\ln 2}\cdot 2^x + C.$

4. METODA SMENE PROMENLJIVE

Integral $\int f(x)dx$ sa u mnogim slučajevima zamenom promenljive x drugom promenljivom t može svesti na integral koji je ili tablični, ili se može rešiti nekim drugim poznatim postupkom.

Tvrđenje 1. Neka je funkcija $x=\varphi(t)$ neprekidna i strogo monotona u intervalu (α,β) i neka ima neprekidan izvod $\varphi'(t)$ u tom intervalu. Neka je interval (a,b) skup vrednosti funkcije $x=\varphi(t)$ u kome je definisana funkcija

[34)] S. D. Poisson, (1781-1840), francuski fizičar i matematičar.

$f(x)$, što znači da je u intervalu (α, β) definisana složena funkcija $f\big(\varphi(t)\big)$. Tada važi jednakost

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

Dokaz. Da bismo dokazali formulu (1), dovoljno je dokazati da su diferencijali njene leve i desne strane jednaki.

Diferenciranjem leve strane dobijamo

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \tag{2}$$

a diferenciranjem desne

$$d\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = f(x)dx, \tag{3}$$

jer je $x = \varphi(t)$ i $dx = \varphi'(t)dt$.

Dakle, na osnovu (2) i (3) je

$$d\int f(x)dx = d\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt,$$

a samim tim je dokazana i formula (1).

Pretpostavimo da smo našli integral na desnoj strani formule (1), tj. da je

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F(t) + C.$$

Dati integral $\displaystyle\int f(x)dx$ je sada lako naći i u funkciji od x. Naime,

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F(t) + C = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C,$$

gde postojanje inverzne funkcije $t = \varphi^{-1}(x)$ funkcije $x = \varphi(t)$ sledi iz stroge monotonosti funkcije $x = \varphi(t)$.

Formula (1) naziva se *formula smene promenljive u integralu.*

Primer 3. Naći $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx.$

Primetimo da se smenom $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$, podintegralna iracionalna funkcija transformiše u racionalnu. Naime,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx &= \int \frac{t^3}{t^2+1}\cdot 6t^5dt = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt \\ &= 6\int\left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t\right) + C.\end{aligned}$$

Kako iz $x = t^6$ sledi $t = \sqrt[6]{x}$, konačno dobijamo da je

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - \sqrt[6]{x} + 6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x} + C.$$

Pored smene $x = \varphi(t)$ koristi se i smena $t = \psi(x)$. Naime, ako imamo integral oblika $\int f\big(\psi(x)\big)\psi'(x)dx$, tada se uvođenjem smene $t = \psi(x)$, $dt = \psi'(x)dx$, dati integral svodi na integral oblika $\int f(t)dt$, tj.

$$\int f\big(\psi(x)\big)\psi'(x)dx = \int f(t)dt. \tag{4}$$

Primer 4. Izračunati sledeće integrale korišćenjem smene $t = \psi(x)$.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\,\mathrm{arc\,tg}\,x}$.

Kako je $d(\mathrm{arc\,tg}\,x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$, uvodimo smenu $t = \mathrm{arc\,tg}\,x$, $dt = d(\mathrm{arc\,tg}\,x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Sledi

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\,\mathrm{arc\,tg}\,x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\,\mathrm{arc\,tg}\,x| + C.$$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$, $x > 1$.

Kako je $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$, uvodimo smenu $t = \ln x$, $dt = \dfrac{dx}{x}$. Sledi

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \int \sqrt{\ln x}\,d(\ln x) = \int \sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C.$$

Navedimo neke integrale koji se izračunavaju metodom smene.

1. Ako je $F(t)$ primitivna funkcija funkcije $f(t)$, tada se zadati integral $\int f(ax+b)dx$ izračunava smenom $t = ax+b$, $dt = adx$, $dx = \dfrac{dt}{a}$, dakle

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

2. Integrali: $\int e^{ax}dx$, $\int \sin axdx$, $\int \cos axdx$ $(a \neq 0)$ izračunavaju se smenom $ax = t$, $adx = dt$, $dx = \dfrac{dt}{a}$.

Imamo:

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} &= \frac{1}{a}\int e^t dt = \frac{1}{a}e^t + C = \frac{1}{a}e^{ax} + C,\\
\int \sin ax dx &= \frac{1}{a}\int \sin t dt = -\frac{1}{a}\cos t + C = -\frac{1}{a}\cos ax + C,\\
\int \cos ax dx &= \frac{1}{a}\int \cos t dt = \frac{1}{a}\sin t + C = \frac{1}{a}\sin ax + C.
\end{aligned}$$

Primer 5. Sada lako nalazimo integrale:

(a) $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

(b) $\displaystyle\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

3. Integrali: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ $(a \neq 0)$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ $(a > 0)$ izračunavaju se smenom $t = \dfrac{x}{a}$, $dt = \dfrac{dx}{a}$, $dx = a dt$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C\\
&= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\\
\int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a dt}{t^2-1} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C\\
&= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\\
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{a dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C\\
&= \arcsin\frac{x}{a} + C,\\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} = \frac{1}{a}\int \frac{a dt}{\sqrt{t^2 \pm 1}} = \ln|t \pm \sqrt{t^2 \pm 1}| + C\\
&= \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.
\end{aligned}$$

4. Na osnovu prethodnih lako nalazimo sledeće integrale:

$$\int \frac{dx}{b^2x^2+a^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C$$
$$= \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C \ (a,b\neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{2a}\ln\left|\frac{x-\frac{a}{b}}{x+\frac{a}{b}}\right|+C$$
$$= \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{bx-a}{bx+a}\right|+C \ (a,b\neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a}+C \ (a,b>0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2\pm a^2}} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm\left(\frac{a}{b}\right)^2}} = \frac{1}{b}\ln|bx+\sqrt{b^2x^2\pm a^2}|+C \ (a,b>0).$$

5. Integral $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ $(a>0, x\in(-a,a))$ možemo rešiti smenom $x=a\sin t$ ili $x=a\cos t$.

Ako stavimo $x=a\sin t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, tada je $dx=a\cos t dt$, pa imamo da je

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt = a\int \sqrt{a^2(1-\sin^2 x)}\cdot\cos t dt$$
$$= a^2\int\sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t dt = a^2\int|\cos t|\cdot\cos t dt.$$

Kako je $|\cos t| = \cos t$ za $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, sledi da je

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int\cos^2 t dt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$
$$= \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C.$$

Iz $x = a\sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sledi $\sin t = \frac{x}{a}$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$, $\cos t = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, pa je konačno

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Integral $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$ izračunavamo smenom $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ ili $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$, a integral $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$ smenom $x = \frac{a}{\sin t}$ ili $x = \frac{a}{\cos t}$.

Dobijamo

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C,$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C.$$

Na kraju napomenimo da se pri primeni metode smene promenljive može javiti problem izbora smene koja dati integral svodi, ili na tablični, ili na oblik koji se može izračunati nekim od poznatih postupaka. Smena se najčešće traži probanjem do izbora one koja dovodi do rezultata. U nekim slučajevima, kao u slučaju kad je integral dat u obliku (4), smena je očigledna, pa se može izvršiti integracija i bez uvođenja nove promenljive.

Primer 6. a) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} = \int \frac{d\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$

$= \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C,$

b) $\frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$= \int \frac{\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \int \frac{d\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

VIII POGLAVLJE

ODREĐENI INTEGRAL

1. DEFINICIJA ODREĐENOG INTEGRALA. DARBUOVE[37)] SUME

Problem nalaženja površine dela ravni ograničene krivom linijom doveo je do pojma određenog integrala.

Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ definisana na segmentu $[a,b]$, $a < b$. Podelimo segment $[a,b]$ pomoću tačaka $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ na n podsegmenata $[x_0,x_1]$ $[x_1,x_2]\ldots,[x_{n-1},x_n]$. Neka je $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ proizvoljna tačka segmenta $[x_{i-1},x_i]$ a $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ dužina segmenta $[x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Definicija 1. Suma

$$\sigma_P = f(\xi_1)\triangle x_1 + f(\xi_2)\triangle x_2 + \cdots + f(\xi_n)\triangle x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \qquad (1)$$

naziva se *Rimanova*[38)] *integralna suma*, ili kraće, *integralna suma* funkcije $f(x)$ koja odgovara datoj podeli P segmenta $[a,b]$ na n podsegmenata i datom izboru tačaka $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Geometrijska interpretacija integralne sume (1) kada je funkcija $f(x)$ nenegativna, data je na sl. 1 i predstavlja površinu osenčene stepenaste figure, tj. sumu površina pravougaonika sa osnovicama $\triangle x_i$ i visinama $f(\xi_i)$, $(i = 1,\ldots,n)$.

Očigledno integralna suma zavisi od načina podele segmenta $[a,b]$ na podsegmente $[x_{i-1},x_i]$, kao i od izbora tačaka $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, pa se za različite podele segmenta $[a,b]$ i izbore tačaka ξ_i dobijaju različite integralne sume.

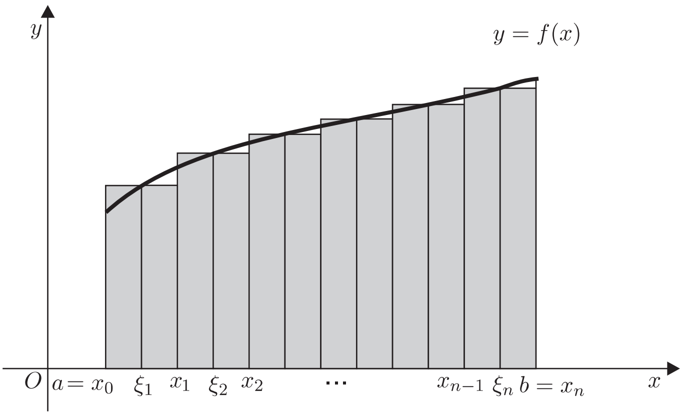
Neka je $\triangle_{\max} = \max \triangle x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ za proizvoljnu podelu P segmenta $[a,b]$.

Definicija 2. Broj I se naziva granična vrednost integralnih suma σ_p kada $\triangle_{\max} \to 0$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za svaku podelu segmenta $[a,b]$ na n podsegmenata i za svaki izbor tačaka $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$, iz nejednakosti $\triangle_{\max} < \delta$ sledi nejednakost

$$|\sigma_P - I| < \varepsilon.$$

[37)] G. Darboux (1842 -1917), francuski matematičar.

[38)] B. Riemann (1826-1866), nemački matematičar.



sl. 1

Piše se $I = \lim\limits_{\triangle\max\to 0} \sigma_P$.

Definicija 3. Za funkciju $f(x)$ kažemo da je *integrabilna u Rimanovom smislu*, ili kraće, *integrabilna* na segmentu $[a,b]$ ako postoji konačna granična vrednost I integralnih suma te funkcije kada $\triangle_{\max} \to 0$. Broj I naziva se *Rimanov* ili *određeni integral funkcije* $f(x)$ na segmentu $[a,b]$ i piše se

$$I = \int_a^b f(x)dx, \tag{2}$$

odnosno

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\triangle_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i. \tag{2'}$$

Brojevi a i b su redom *donja* i *gornja granica integrala*, $f(x)$ je *podintegralna funkcija*, x je *integraciona promenljiva.* Pri tom važi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du,$$

tj. određeni integral predstavlja broj koji ne zavisi od načina označavanja integracione promenljive.

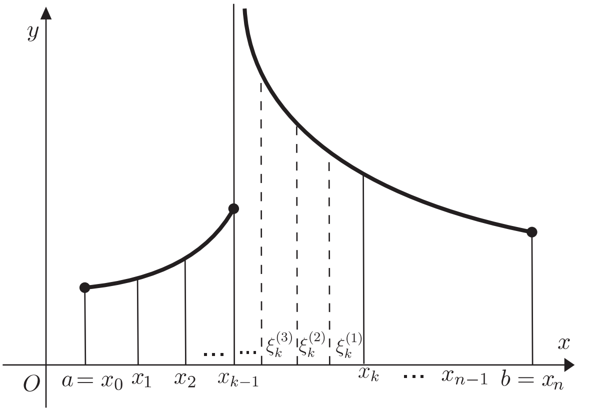
Primetimo da se u definiciji određenog integrala u jednakosti $(2')$ umesto $\triangle_{\max} \to 0$ ne može staviti $n \to +\infty$ (n je broj podsegmenata na koje je podeljen segment $[a,b]$). Naime, iz $\triangle_{\max} \to 0$ sledi $n \to +\infty$, ali obrnuto ne mora biti tačno. Na primer, ako se najduži podsegment $[x_{k-1}, x_k]$, dobijen pri prvoj podeli segmenta $[a, b]$ na n podsegmenata u sledećim podelama više ne deli, već se dele ostalih $n-1$, tada kad $n \to +\infty$, $\triangle_{\max} = \triangle x_k$ ne teži nuli.

Iz Definicije 3 sledi da je određeni integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, u slučaju kad je funkcija $f(x)$ nenegativna, jednak graničnoj vrednosti niza površina stepenastih figura obrazovanih od pravougaonika kada $\triangle_{\max} \to 0$, a što znači da je $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ jednak površini ,,krivolinijskog trapeza“, tj. figure u ravni Oxy ograničene grafikom funkcije $y = f(x)$, osom Ox i pravama $x = a$ i $x = b$, a što ćemo kasnije dokazati. Videti sl. 1.

Iz definicije određenog integrala takođe sledi da neograničena funkcija na segmentu $[a, b]$ nije integrabilna na tom segmentu.

Neka je, na primer, $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [a, b]$ i neka je P podela segmenta $[a, b]$ na podsegmente $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, gde je $x_0 = a$ i $x_n = b$. Ako funkcija $f(x)$ nije ograničena na segmentu $[a, b]$, tada ona nije ograničena na bar jednom podsegmentu $[x_{k-1}, x_k]$ podele P segmenta $[a, b]$. Tada za svako $n \in N$ postoje tačke $\xi_k^{(n)} \in [x_{k-1}, x_k]$ takve da je

$$f(\xi_k^{(n)}) > n. \qquad (3)$$



sl. 2

Vidi sl. 2.

Kako za fiksirane $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq k)$ integralna suma

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}} f(\xi_i)\triangle x_i$$

ima potpuno određenu vrednost, na osnovu (3) sledi da za svaki realan broj $M > 0$ postoji $n_0 \in N$, tako da je za $\xi_k^{(n_0)} \in [x_{k-1}, x_k]$

$$f(\xi_k^{(n_0)})\triangle x_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}} f(\xi_i)\triangle x_i > M,$$

tj.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f(\xi_k^{(n)})\triangle x_k+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}} f(\xi_i)\triangle x_i\right)=+\infty.$$

Sledi da granična vrednost integralnih suma σ_P, koje se dobijaju kada se u podsegmentu $[x_{k-1}, x_k]$, kao i u podsegmentima koji se dobijaju podelom tog podsegmenta, uzimaju tačke $\xi_k^{(n)}$ $(n \in N)$, ne može biti konačna kada $\triangle_{\max} \to 0$.

Ovim smo dokazali da važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 1. Potreban uslov da funkcija $f(x)$ bude integrabilna na segmentu $[a, b]$ jeste da je ograničena na $[a, b]$.

Ubuduće ćemo razmatrati samo ograničene funkcije.

Definicija 4. Neka je funkcija $f(x)$ definisana i ograničena na segmentu $[a, b]$ koji je tačkama $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ podeljen na n podsegmenata $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ i neka je

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ i } M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad (i=1,\ldots,n).$$

Sume

$$s=m_1\triangle x_1+m_2\triangle x_2+\cdots+m_n\triangle x_n=\sum_{i=1}^{n} m_i\triangle x_i$$

i

$$S=M_1\triangle x_1+M_2\triangle x_2+\cdots+M_n\triangle x_n=\sum_{i=1}^{n} M_i\triangle x_i$$

nazivaju se redom *donja* i *gornja Darbuova suma* funkcije $f(x)$ za datu podelu segmenta $[a, b]$.

Geometrijska interpretacija donje i gornje Darbuove sume data je na sl. 3 i sl. 4.

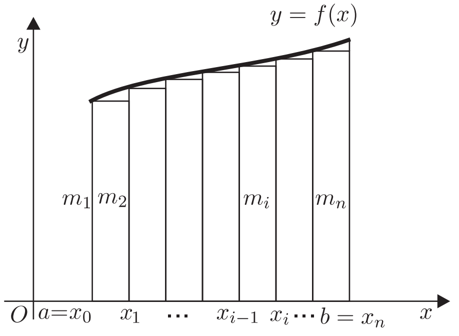
Svaka integralna suma (1) za datu podelu P segmenta $[a, b]$ nalazi se između gornje i donje Darbuove sume te podele.

Zaista, ako je

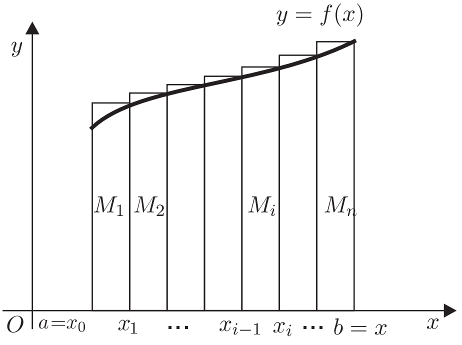
$$M=\sup_{x\in[a,b]} f(x) \text{ i } m=\inf_{x\in[a,b]} f(x),$$

tada je za proizvoljne $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$m\le m_i\le f(\xi_i)\le M_i\le M \ (i=1,2,\ldots,n),$$



sl. 3



sl. 4

tj.

$$m\triangle x_i \leq m_i\triangle x_i \leq f(\xi_i)\triangle x_i \leq M_i\triangle x_i \leq M\triangle x_i \ (i = 1, 2, \dots, n),$$

odnosno

$$m\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i\triangle x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\triangle x_i \leq M\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i,$$

konačno

$$m(b-a) \leq s \leq \sigma_P \leq S \leq M(b-a). \tag{4}$$

Iz nejednakosti (4) sledi da su za sve podele segmenta $[a, b]$ skupovi: donjih Darbuovih suma s, integralnih suma σ_P i gornjih Darbuovih suma S ograničeni.

Pokažimo da za skup integralnih suma σ_P, koje dobijamo za fiksiranu podelu P segmenta $[a, b]$ i različite izbore tačaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, važi

$$s = \inf\{\sigma_P\}, \quad S = \sup\{\sigma_P\}. \tag{5}$$

Kako je, na osnovu (4), $s \leq \sigma_P$ za sve integralne sume σ_P podele P, treba još da dokažemo da za svako $\varepsilon > 0$, postoji suma σ_P, takva da je $\sigma_P < s + \varepsilon$.

Zaista, ako tačke ξ_i izaberemo tako da je

$$f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a} \ (i = 1, 2, \dots, n),$$

tada je

$$\sigma_P - s = \sum_{i=1}^{n}\big(f(\xi_i) - m_i\big)\triangle x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

tj.

$$\sigma_p < s + \varepsilon.$$

Ovim smo dokazali prvu jednakost. Druga jednakost se dokazuje analogno.

Definicija 5. Ako je skup tačaka podele P segmenta $[a, b]$ podskup skupa tačaka podele P' tog segmenta, tada kažemo da je podela P' *profinjenje* podele P.

Tvrđenje 2. Ako su s i S donja i gornja Darbuova suma podele P, a s' i S' donja i gornja Darbuova suma podele P' koja je profinjenje podele P, tada je

$$s \leq s' \leq S' \leq S.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da tvrđenje važi u slučaju kad je podela P' realizovana sa jednom tačkom više. Neka je podela P realizovana pomoću tačaka $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, a podela P' pomoću tačaka $a = x_0 < x' < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Ako je $s^* = \sum_{i=2}^{n} m_i \triangle x_i$, tada je

$$s = m_1(x_1 - x_0) + s^*,$$

a ako je $m_1' = \inf_{x \in [x_0, x']} f(x)$ i $m_1'' = \inf_{x \in [x', x_1]} f(x)$, tada je

$$s' = m_1'(x' - x_0) + m_1''(x_1 - x') + s^*.$$

Kako je

$$m_1 = \min\{m_1', m_1''\},$$

to je

$$m_1(x_1 - x_0) = m_1(x' - x_0) + m_1(x_1 - x') \leq m_1'(x' - x_0) + m_1''(x_1 - x'),$$

pa sledi da je

$$s \leq s'.$$

Analogno se dokazuje da je $S' \leq S$.

Posledica 1. Ako je s_1 donja Darbuova suma podele P_1 i S_2 gornja Darbuova suma podele P_2, tada je

$$s_1 \leq S_2.$$

Zaista, ako je P podela koju realizuju sve tačke podela P_1 i P_2 i ako su s i S donja i gornja Darbuova suma podele P, tada je na osnovu prethodnog tvrđenja

$$s_1 \leq s \leq S \leq S_2,$$

što je i trebalo dokazati.

Iz Tvrđenja 2 i Posledice 1 sledi da je za sve podele skup donjih Darbuovih suma s ograničen odozgo, na primer, bilo kojom gornjom Darbuovom sumom, a da je skup gornjih Darbuovih suma S ograničen odozdo, na primer, bilo kojom donjom Darbuovom sumom, a što znači da postoje konačni

$$I_* = \sup\{s\} \text{ i } I^* = \inf\{S\}$$

i pri tome je za sve sume s i S

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S. \tag{6}$$

Tvrđenje 3. Funkcija $f(x)$, ograničena na segmentu $[a, b]$, je integrabilna na tom segmentu *akko* je

$$\lim_{\triangle_{\max}\to 0}(S - s) = 0. \tag{7}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a, b]$ i da je $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Na osnovu Definicije 2 i Definicije 3 to znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za sve podele segmenta $[a, b]$ i sve izbore tačaka ξ_i za integralne sume σ funkcije $f(x)$ važi:

ako je $\triangle_{\max} < \delta$, tada je $|\sigma_P - I| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, tj. $I - \dfrac{\varepsilon}{2} < \sigma_P < I + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Iz (5) sledi da za odgovarajuće donje i gornje Darbuove sume s i S važi:

$I - \dfrac{\varepsilon}{2} \leq s \leq S \leq I + \dfrac{\varepsilon}{2}$, tj. $0 \leq S - s \leq \varepsilon$, odnosno $\displaystyle\lim_{\triangle_{\max}\to 0}(S - s) = 0$, dakle, važi (7).

Pretpostavimo sada da važi (7). To znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za sve podele segmenta $[a, b]$, takve da je $\triangle_{\max} < \delta$ važi

$$S - s < \varepsilon, \tag{8}$$

što, s obzirom na (6), znači da je $I_* = I^*$. Ako stavimo da je $I_* = I^* = I$, tada nejednakost (6) prelazi u nejednakost

$$s \leq I \leq S. \tag{9}$$

Kako, prema (4), za Darbuove sume s i S i odgovarajuću integralnu sumu σ_P važi

$$s \leq \sigma_P \leq S, \tag{10}$$

zaista, na osnovu poslednje tri nejednakosti, sledi da važi

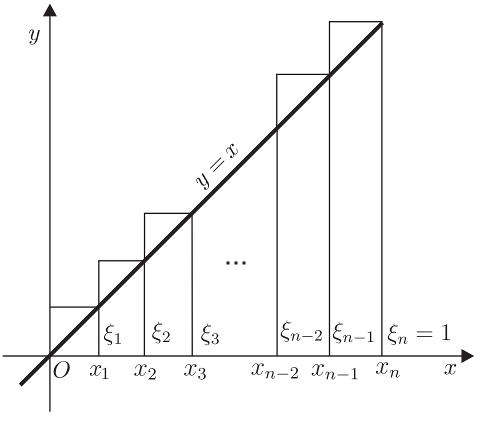
$$\text{ako je } \triangle_{\max} < \delta, \text{ tada je } |I - \sigma_P| < \varepsilon,$$

tj.

$$I = \lim_{\triangle_{\max}\to 0} \sigma_P,$$

a što i znači da je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a, b]$, što je trebalo i dokazati.
Napomenimo da se brojevi $I_* = \sup\limits_P\{s\}$ i $I^* = \inf\limits_P\{S\}$ nazivaju redom *donji* i *gornji Darbuov integral.* Može se dokazati da je

$$I_* = \lim_{\triangle_{\max}\to 0} s \text{ i } I^* = \lim_{\triangle_{\max}\to 0} S.$$



sl. 5

Primer 1. Izračunati $\int_0^1 xdx$ korišćenjem definicije određenog integrala.

Podelimo interval $[0, 1]$ na n jednakih podintervala dužine $\triangle x = \dfrac{1}{n}$ i za tačke ξ_k uzmimo desne krajeve podintervala, tj.

$$\xi_1 = \triangle x,\ \xi_2 = 2\triangle x, \ldots, \xi_n = n\triangle x$$

(videti sliku 5).

Nađimo integralnu sumu

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n}(i\cdot\triangle x)\cdot\triangle x = \sum_{i=1}^{n} i(\triangle x)^2\\ &= (1+2+\cdots+n)(\triangle x)^2 = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Na osnovu Definicije 3 sledi da je

$$\int_0^1 xdx = \lim_{n\to\infty}\sigma = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Primer 2. Izračunati $\displaystyle\int_0^1 e^x dx.$

Na osnovu definicije određenog integrala je (vidi sl. 6)

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{i\cdot\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

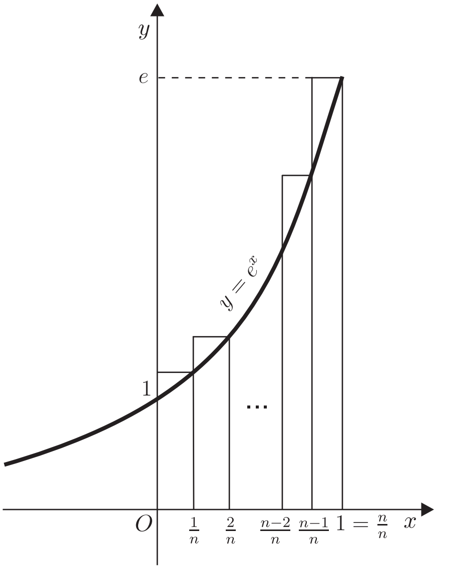
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Big(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}+e^{\frac{n}{n}}\Big)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}\Big(1+e^{\frac{1}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-2}{n}}+e^{\frac{n-1}{n}}\Big)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1-e^{\frac{n}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}$$

$= e-1,$ jer je

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1.$$



sl. 6

2. NEKE KLASE INTEGRABILNIH FUNKCIJA

Videli smo da neograničene funkcije nisu integrabilne. Isto tako, ni svaka ograničena funkcija nije integrabilna, kao što to pokazuje primer *Dirihleove*[39] *funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \text{ racionalno,}\\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalno.}\end{cases}$$

Naime, ako su ξ_i racionalne tačke, tada je integralna suma (1) jednaka $\sum\limits_{i=1}^{n}\triangle x_i = b-a$, jer je $f(\xi_i)=1$, a ako su ξ_i iracionalne tačke, tada je integralna suma jednaka 0, jer je $f(\xi_i)=0$; prema tome, granična vrednost integralne sume ne postoji, tj. Dirihleova funkcija, iako ograničena, nije integrabilna.

Ovde ćemo pokazati da su neprekidne, neke prekidne i monotone funkcije integrabilne funkcije.

Tvrđenje 4. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a,b]$, tada je $f(x)$ integrabilna na $[a,b]$.

Dokaz. Pošto, na osnovu Tvrđenja 14, odeljka 2.4, V poglavlja iz neprekidnosti funkcije $f(x)$ na segmentu $[a,b]$ sledi njena ravnomerna nepre-

[39] P. G. Dirichlet (1805-1859), nemački matematičar.

kidnost na $[a,b]$, to znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ i podela segmenta $[a,b]$ na n delova $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2 \dots, n)$, tako da

$$\triangle_{\max} < \delta \Rightarrow |M_i - m_i| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (i = 1, \dots, n),$$

gde je $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ i $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Sledi

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon,$$

a odavde, na osnovu Tvrđenja 3, sledi integrabilnost funkcije $f(x)$ na $[a,b]$.

Tvrđenje 5. Ako je funkcija $f(x)$ ograničena i ima konačan broj tačaka prekida na $[a,b]$, tada je $f(x)$ integrabilna na $[a,b]$.

Tvrđenje 6. Ako je funkcija $f(x)$ monotona na segmentu $[a,b]$, tada je $f(x)$ integrabilna na $[a,b]$.

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ rastuća na $[a,b]$. Za svako $\varepsilon > 0$ možemo naći takvu podelu segmenta $[a,b]$ da je $\triangle_{\max} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Ako je $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ i $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, tada, pošto je za rastuću funkciju $\sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i) = f(b) - f(a)$, imamo

$$\begin{aligned} S - s &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\triangle x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon, \end{aligned}$$

a odavde, na osnovu Tvrđenja 3, sledi integrabilnost funkcije $f(x)$ na $[a,b]$.

3. OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA

Ovde ćemo izložiti najvažnije osobine određenog integrala.

1. $\displaystyle\int_a^b dx = b - a.$

Ovo svojstvo direktno sledi iz Definicije 3 određenog integrala ako uzmemo $f(x) = 1$, $x \in [a,b]$. Naime,

$$\int_a^b dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\triangle_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} \triangle x_i = \lim_{\triangle_{\max}\to 0} (b-a) = b - a.$$

2. a) $\int_a^a f(x)dx = 0$; b) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ $(a < b)$.

a) U slučaju kada je $b = a$, segment $[a, b]$ svodi se na tačku, pa iz Definicije 3, zbog $\Delta x_i = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, sledi ova osobina.

b) Kada je $a < b$, dužina odsečaka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Ako izračunavamo integral na segmentu $[b, a]$ koji se deli na segmente $[x_i, x_{i-1}]$ $(i = n, n-1, \dots, 1)$ kod kojih je $x_{i-1} - x_i = -(x_i - x_{i-1}) = -\Delta x_i < 0$, tada iz Definicije 3 sledi

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\triangle_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) =$$

$$= -\lim_{\triangle_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = -\int_a^b f(x)dx.$$

3. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentima $[a, c]$ i $[c, b]$, tada je ona integrabilna na segmentu $[a, b]$ i važi jednakost

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{11}$$

(*svojstvo aditivnosti po oblasti integracije*).

Prvo razmotrimo slučaj: $a < c < b$. Pre svega, jasno je da svaka podela segmenata $[a, c]$ i $[c, b]$ definiše i jednu podelu segmenata $[a, b]$. Ako je

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

podela segmenta $[a, b]$ dobijena objedinjavanjem podela segmenata $[a, c]$ i $[c, b]$ i ako je $x_k = c$, tada je za proizvoljne tačke $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\triangle x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i.$$

Pošto je funkcija $f(x)$ po pretpostavci integrabilna na segmentima $[a, c]$ i $[c, b]$, to znači da postoje granične vrednosti suma na desnoj strani gornje nejednakosti kad $\triangle_{\max} \to 0$ i da su jednake redom $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$. Sledi da postoji i granična vrednost sume na levoj strani kad $\triangle_{\max} \to 0$ i da je jednaka $\int_a^b f(x)dx$, što i znači da je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a, b]$ i da važi jednakost (11).

Ako je $a < b < c$, tada na osnovu prethodnog slučaja sledi

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

odakle je, na osnovu osobine 2b),

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Ako su funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ integrabilne na segmentu $[a,b]$, tada je i njihova linearna kombinacija $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, takođe integrabilna na $[a,b]$ i važi jednakost

$$\int_a^b \big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\big)dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dx$$

(svojstvo *linearnosti određenog integrala*).

Ova osobina direktno sledi iz Definicije 3 određenog integrala, kao i svojstva linearnosti konačne sume i granične vrednosti:

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)dx\big)dx &\overset{\text{def}}{=} \lim_{\triangle_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(\lambda_1 f_1(\xi_i) + \lambda_2 f_2(\xi_i)\big)\Delta x_i = \\ &= \lambda_1 \lim_{\triangle_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lambda_2 \lim_{\triangle_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i \\ &\overset{\text{def}}{=} \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dx + \lambda_2 \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Specijalno za $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ imamo

$$\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx,$$

(svojstvo *aditivnosti* određenog integrala).

Za $\lambda_2 = 0$ dobijamo

$$\int_a^b \lambda_1 f_1(x)dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dx,$$

(svojstvo *homogenosti* određenog integrala).

5. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a,b]$ $(a < b)$ i $f(x) \geq 0$ za $x \in [a,b]$, onda je $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Ovo svojstvo sledi iz činjenice da je za $a<b$ integralna suma $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$ (jer je tada $\Delta x_i \geq 0$ $(i=1,\ldots,n)$), pa je i njena granična vrednost, tj. određeni integral, nenegativna.

6. Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na segmentu $[a,b]$ $(a<b)$ i $f(x) \geq g(x)$ $(x \in [a,b])$, onda je $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Ovo svojstvo sledi iz činjenice da je funkcija $f(x)-g(x) \geq 0$ i integrabilna na $[a,b]$, primenom prethodnog svojstva 5.

7. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a,b]$, tada je funkcija $|f(x)|$ takođe integrabilna na $[a,b]$ i važi

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Nije teško pokazati da za odgovarajuće Darbuove sume $\overline{S}, \overline{s}$ i S i s redom za funkcije $|f(x)|$ i $f(x)$ važi nejednakost $\overline{S}-\overline{s} \leq S-s$, a odavde, na osnovu Tvrđenja 3, iz integrabilnosti funkcije $f(x)$ sledi integrabilnost funkcije $|f(x)|$. Kako je $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, primenom svojstva 6 imamo

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

a to upravo i znači da je

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Napomenimo da iz integrabilnosti $|f(x)|$ ne mora u opštem slučaju da sledi integrabilnost $f(x)$.

8. Neka je $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Tada, ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na $[a,b]$, važi *ocena određenog integrala*:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{12}$$

Kako je $m \leq f(x) \leq M$ $(x \in [a,b])$, iz svojstva 6 (monotonosti) sledi

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx.$$

Odavde neposredno dobijamo ocenu (12), pošto je $\displaystyle\int_a^b dx = b-a$ na osnovu svojstva 1.

9. Ako je $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ i $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ i ako je $f(x)$ integrabilna na $[a,b]$, tada postoji $\mu \in [m,M]$ tako da je

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \quad \text{tj. } \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{13}$$

Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a,b]$, tada postoji $\xi \in (a,b)$ tako da je

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \quad \text{tj. } f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{14}$$

Broj μ, odnosno broj $f(\xi)$ naziva se *srednja vrednost funkcije $f(x)$ na* $[a,b]$.

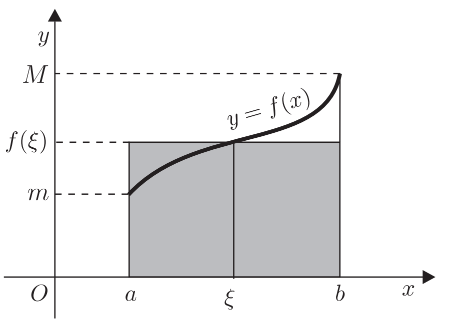
Relacija (13) direktno sledi iz (12). Naime, deobom sa $b-a$, iz relacije (12) sledi

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M,$$

odakle, stavljanjem $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ $(m \le \mu \le M)$, sledi (13).

Ako je $f(x)$ neprekidna, tada ona, na osnovu Tvrđenja 13, odeljka 2.3, V poglavlja uzima sve vrednosti između m i M, tj. za neko $\xi \in (a,b)$ je $f(\xi) = \mu$, pa direktno sledi relacija (14).

Formula (14), ukoliko je $f(x) \ge 0$ $(x \in [a,b])$ ima sledeći geometrijski smisao: površina krivolinijskog trapeza (videti sl. 7) jednaka je površini pravougaonika čije stranice imaju dužine $b-a$ i $f(\xi)$.



sl. 7

4. ODREĐENI INTEGRAL KAO FUNKCIJA GORNJE GRANICE. NJUTN-LAJBNICOVA FORMULA

Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ integrabilna na $[a,b]$. Može se pokazati da je ona tada integrabilna na $[a,x]$ za svako $x \in [a,b]$. Odavde sledi

da je na $[a,b]$ definisana funkcija
$$F(x)=\int_a^x f(t)dt^{40)}$$
koja se naziva integralom sa promenljivom granicom.

Razmotrimo svojstva ove funkcije.

Tvrđenje 7. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na $[a,b]$, tada je funkcija $F(x)$ neprekidna na $[a,b]$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan broj, neka $x, x+\triangle x\in[a,b]$ i neka je $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Tada iz svojstava 3, 7 i 8 određenog integrala sledi

$$\begin{aligned}\big|F(x+\Delta x)-F(x)\big| &= \left|\int_a^{x+\triangle x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right| = \\ &= \left|\int_x^{x+\triangle x} f(t)dt\right|\le M|\Delta x|<\varepsilon\end{aligned}$$

za svako $x, x+\triangle x\in[a,b]$, takvo da je $|\triangle x|<\dfrac{\varepsilon}{M}$, čime je dokaz tvrđenja završen.

Tvrđenje 8. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$, tada je funkcija $F(x)$ diferencijabilna u svakoj tački $x\in(a,b)$ i pri tom je
$$F'(x)=f(x).$$
Drugim rečima, ako je podintegralna funkcija $f(x)$ neprekidna, tada je integral sa promenljivom granicom jednak jednoj od primitivnih funkcija funkcije $f(x)$.

Dokaz. Neka $x, x+\triangle x\in(a,b)$. Tada, na osnovu relacije (14), imamo
$$F(x+\triangle x)-F(x)=\int_x^{x+\triangle x} f(t)dt=f(\xi)\triangle x,\quad \xi\in(x,x+\triangle x).$$
Odavde dobijamo
$$F'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{F(x+\triangle x)-F(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0} f(\xi)=f(x),$$
jer $f(\xi)\to f(x)$ kada $\triangle x\to 0$ zbog neprekidnosti funkcije $f(x)$. Iz dokaza sledi da u krajevima intervala $[a,b]$ funkcija $F(x)$ ima redom, u tački $x=a$ levi izvod $F'_+(a)=f(a)$, a u tački $x=b$ desni izvod $F'_-(b)=f(b)$.

[40] Integralnu promenljivu smo označili sa t pošto smo sa x označili gornju granicu integrala.

Smisao Tvrđenja 8 jeste da su za neprekidne funkcije integracija i diferenciranje inverzne operacije, jer jednakost $F'(x) = f(x)$ možemo ovako da zapišemo

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \text{ tj. } \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Tvrđenje 9. (*Njutn–Lajbnicova formula.*) Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a,b]$ i neka je $\Phi(x)$ njena proizvoljna primitivna funkcija. Tada važi jednakost

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{15}$$

koja je poznata pod imenom *Njutn-Lajbnicova formula.*

Dokaz. Iz Tvrđenja 8 sledi da se bilo koja primitivna funkcija $\Phi(x)$ funkcije $f(x)$ neprekidne na $[a,b]$ može napisati u obliku

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C,$$

gde je C neka konstanta (jer se dve proizvoljne primitivne funkcije funkcije $f(x)$ razlikuju za konstantu C). Ako u gornjoj jednakosti stavimo prvo $x = a$, a zatim $x = b$, dobićemo korišćenjem svojstva 2 a) određenog integrala,

$$\Phi(a) = C \quad \text{i} \quad \Phi(b) = \int_a^b f(x)dx + C.$$

Odavde sledi

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Formula (15) se obično piše u drugačijem, skraćenom obliku. Naime, razlika $\Phi(b) - \Phi(a)$ se označava simbolom $\Phi(x)\Big|_a^b$, pa formula (15) glasi

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b.$$

Primer 3. $\int_{-2}^1 (2x^3 + 3x - 4)dx = \left(2\cdot\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^2}{2} - 4x\right)\Big|_{-2}^1 = \frac{1}{2}\cdot 1^4 + \frac{3}{2}\cdot 1^2 - 4\cdot 1 - \left(\frac{1}{2}\cdot(-2)^4 + \frac{3}{2}\cdot(-2)^2 - 4(-2)\right) = -24.$

Primer 4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

$\displaystyle = \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

Primer 5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\sqrt{x} + x^2 - 5}{x^2\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2\sqrt{x}}\right) dx =$

$\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{5}{2}}\right) dx = \left(\ln|x| + 2\sqrt{x} + \frac{10}{3x\sqrt{x}}\right)\Bigg|_1^2 = \ln 2 + 2\sqrt{2} + \frac{10}{6\sqrt{2}} -$

$\displaystyle\ln 1 - 2 - \frac{10}{3} = \ln 2 + \frac{17\sqrt{2}}{6} - \frac{16}{3}.$

Primer 6. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos 2x}dx = \int_0^\pi \sqrt{4\cos^2 x}dx = 2\int_0^\pi |\cos x|dx$

$\displaystyle = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2(1-0) - 2(0-1) = 4.$

Jasno, integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$ ne mora imati primitivnu funkciju na $[a, b]$.

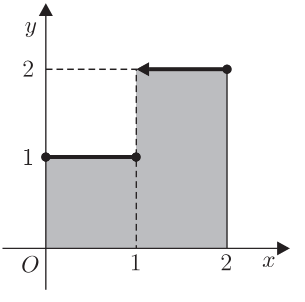
Pokazaćemo to na sledećem primeru.

Primer 7. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

ima tačku prekida prve vrste $x = 1$. Iz Tvrđenja 5 sledi da je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[0, 2]$, a može se primenom definicije pokazati da je

$$\int_0^2 f(x)dx = 3.$$



sl. 8

Videti sl. 8.

Pokažimo da funkcija $f(x)$ nema primitivnu funkciju.

Pretpostavimo suprotno – da funkcija $f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$ na segmentu $[0, 2]$. Na intervalu $[0, 1)$ to bi bila funkcija oblika $F_1(x) = x + C$, a na intervalu $(1, 2]$ funkcija oblika $F_2(x) = 2x + C_1$, gde su C i C_1 proizvoljne konstante. Kako primitivna funkcija mora da bude diferencijabilna, a to znači i neprekidna, sledi da mora biti

$$F(1) = F_1(1-0) = F_2(1+0),$$

tj.

$$F(1) = \lim_{x\to 1-0}(x + C) = \lim_{x\to 1+0}(2x + C_1) = 1 + C = 2 + C_1,$$

odakle je $C_1 = C - 1$, pa sledi da je primitivna funkcija funkcije $f(x)$ oblika

$$F(x) = \begin{cases} x + C, & 0 \le x \le 1 \\ 2x + C - 1, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

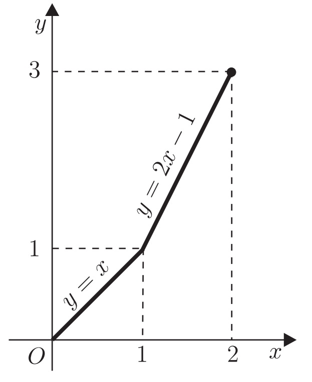
Međutim, funkcija $F(x)$ nije diferencijabilna u tački $x = 1$, jer je $F'_-(1) = 1$, $F'_+(1) = 2$, a što je u protivurečnosti s pretpostavkom da je $F(x)$ primitivna funkcija.

Iz dobijene protivurečnosti upravo sledi da funkcija $f(x)$ nema primitivnu funkciju.

Na sl. 9 dat je grafik jedne od ovih funkcija

$$F_0(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

dobijene za $C = 0$.



sl. 9

Primer 8. Funkcija $F_0(x)$ iz prethodnog primera je neprekidna na segmentu $[0, 2]$, pa sledi da ima primitivnu funkciju.

Nije teško pokazati da je primitivna funkcija funkcije $F_0(x)$ funkcija oblika

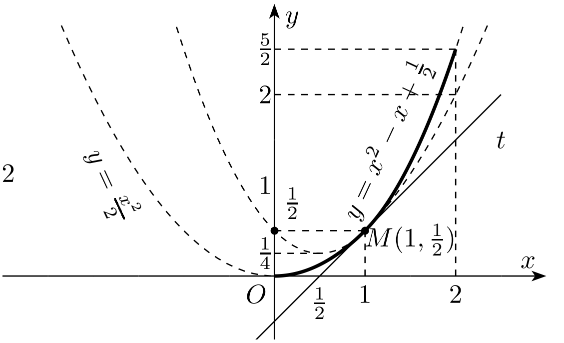
$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + C, & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - x + \dfrac{1}{2} + C, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

koja je diferencijabilna u svakoj tački $[0, 2]$. Specijalno, u tački $x = 1$ je $\Phi'(1) = \Phi'_-(1) = \Phi'_+(1) = 1$.

Na sl. 10 dat je grafik jedne od ovih funkcija

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - x + \dfrac{1}{2}, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

dobijene za $C = 0$.



sl. 10

5. SMENA PROMENLJIVE KOD ODREĐENOG INTEGRALA

U sledećem tvrđenju ćemo pokazati kako se uvodi smena promenljive kod određenog integrala.

Tvrđenje 10. Neka funkcija $x = \varphi(t)$ ima neprekidan izvod na segmentu $[\alpha, \beta]$, neka je segment $[a, b]$ skup vrednosti te funkcije na kome je definisana neprekidna funkcija $f(x)$ pri čemu je $a = \varphi(\alpha)$ i $b = \varphi(\beta)$. Tada važi sledeća formula

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{16}$$

Dokaz. Iz pretpostavki tvrđenja sledi da je na $[\alpha, \beta]$ definisana složena funkcija $f(\varphi(t))$ kao i neprekidnost podintegralnih funkcija na levoj i desnoj strani jednakosti (16). Odatle sledi egzistencija oba određena integrala u formuli (16). Neka je $F(x)$ proizvoljna primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na segmentu $[a, b]$. Za $t \in [\alpha, \beta]$ definisana je složena funkcija $F(\varphi(t))$ koja je primitivna funkcija funkcije $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, jer za $t \in [\alpha, \beta]$ važi:

$$F'(\varphi(t)) = F'_\varphi \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Odavde, primenom Njutn-Lajbnicove formule (15), dobijamo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

kao i

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

odakle sledi formula (16).

Napomenimo da se koristi i smena $t = \psi(x)$, pri čemu je neophodno da postoji inverzna funkcija funkcije $t = \psi(x)$, tj. funkcija $x = \psi^{-1}(t)$ i da za nju budu ispunjeni uslovi pod kojima važi formula zamene promenljive.

Pokažimo da važe svojstva:
Ako je funkcija $f(x)$ parna, tada je

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$$

a ako je neparna, tada je

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Korišćenjem svojstva aditivnosti po oblasti integracije imamo

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

U integralu $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ uvedimo smenu $x = -t$, $dx = -dt$, a nove granice su za $x = -a$, $t = a$, a za $x = 0$, $t = 0$, pa dobijamo

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt.$$

Ako je funkcija $f(x)$ parna, tada je $f(-x) = f(x)$ i $\int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt$, pa je

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Ako je funkcija $f(x)$ neparna, tada je $f(-x) = -f(x)$ i $\int_{0}^{a} f(-t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt$, pa je

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt - \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

Primer 9. Izračunati $\int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5}$.

Kako je

$$\int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5} = \int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{(2x-1)^2 + 4},$$

uvodimo smenu $t = 2x - 1 = \varphi(x)$, $dt = 2dx$, $dx = \frac{1}{2}dt$. Donjoj granici $x = 0,5$ odgovara vrednost $t_1 = 2 \cdot 0,5 - 1 = 0$, a gornjoj granici $x = 1,5$ odgovara vrednost $t_2 = 2 \cdot 1,5 - 1 = 2$, tj. nove granice integrala su 0 i 2. Sledi

$$\int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5} = \int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{(2x-1)^2 + 4} = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{2}\Big|_{0}^{2} =$$
$$= \frac{1}{4}(\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{16}.$$

Primer 10. Izračunati $\int_{1}^{4} \frac{2\sqrt{x}}{5 + \sqrt{x}}dx$.

Uvedimo smenu $t = 5 + \sqrt{x}$, odakle je $x = (t-5)^2 = t^2 - 10t + 25 = \varphi(t)$, $dx = (2t - 10)dt$. Donjoj granici $x = 1$ odgovara vrednost $t_1 = 5 + \sqrt{1} = 6$, a

IX POGLAVLJE

REDOVI

1. NUMERIČKI REDOVI

1.1. Osnovni pojmovi

Definicija 1. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ niz realnih brojeva. Izraz

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n + \cdots \quad \text{ili} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

naziva se *numerički* (*realni*) *red* sa opštim članom a_n.

Nadalje ćemo indeks sabiranja u (1) označavati i nekim od slova abecede: i, j, k itd.

Definicija 2. Suma prvih n članova reda (1)

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2}$$

naziva se n*-ta parcijalna* ili n*-ta delimična suma* reda (1).

Dakle,

$$\begin{aligned} s_1 \quad &= a_1, \\ s_2 \quad &= a_1 + a_2, \\ s_3 \quad &= a_1 + a_2 + a_3, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n \quad &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

su redom, prva, druga, treća, $\ldots$, n-ta parcijalna suma reda (1).

Definicija 3. Kaže se da je red (1) *konvergentan* ako postoji konačna granična vrednost s niza parcijalnih suma $(s_n)_{n \in N}$:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

Broj s je *suma reda* (1) i piše se[41)]

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

[41)]Koristimo jedan isti simbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kako za označavanje samog reda (1), tako i za označavanje njegove sume, ako on konvergira.

Ukoliko ne postoji konačan $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, za red (1) kaže se da je *divergentan.* Pri tom, ako je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty\ (-\infty),$$

kaže se da red (1) *određeno divergira* ka $+\infty$ $(-\infty)$ i piše se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty\ (-\infty).$$

Divergentan red, koji nije određeno divergentan, naziva se *oscilatorno* (ili *neodređeno*) *divergentnim.*

Primer 1. Ispitatajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+5)}$.

Opšti član reda je $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+5)}$. Napišimo ga u obliku zbira elementarnih razlomaka:

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+5)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+5} = \frac{(2A+2B)n+5A+B}{(2n+1)(2n+5)}.$$

Odavde sledi:

$$\begin{aligned} 2A+2B&=0,\\ 5A+B&=1. \end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo $A=\dfrac{1}{4}$, $B=-\dfrac{1}{4}$, pa je

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5}\right).$$

Pošto je, na osnovu definicije 3, konvergencija reda (1) ekvivalentna konvergenciji niza parcijalnih suma (4), ispitajmo konvergenciju niza $(s_n)_{n\in N}$. Kako je

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+5)} = \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+5}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}-\right.\\ &\left.-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\cdots-\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right), \end{aligned}$$

sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+5}\right) = $$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{15} = \frac{2}{15},$$

jer je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+5} = 0.$$

Dakle, dati red je konvergentan i njegova suma je jednaka $\frac{2}{15}$, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+5)} = \frac{2}{15}.$$

1.2. Potrebni uslovi konvergencije. Košijev opšti kriterijum konvergencije

Tvrđenje 1. Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada njegov opšti član a_n teži nuli, tj. važi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3}$$

Dokaz. Pošto je red konvergentan, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ i $s_n = s_{n-1} + a_n$, sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Iz Tvrđenja 1, korišćenjem principa kontrapozicije ($p \Rightarrow q \iff (\rceil q \Rightarrow \rceil p)$), dobijamo kao posledicu dovoljan uslov divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ako opšti član a_n reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ne teži nuli, tj. $\rceil(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0)$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Napomenimo da iz uslova (3) ne sledi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, tj. da uslov (1) predstavlja samo potreban, ali ne i dovoljan uslov konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kao što to ilustruje sledeći primer.

Primer 2. Ispitajmo konvergenciju *harmonijskog reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{4}$$

Ako u nejednakosti

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

stavimo redom $n = 2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}, \ldots$, dobijamo nejednakosti:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \\
\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}, \\
\ldots, \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k} > 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}.
\end{gathered}$$

Ocenimo sada n-tu parcijalnu sumu s_n. Neka je k najveći prirodni broj, takav da je $2^k \leq n$. Biće

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{n} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2}.
\end{aligned}$$

Jasno, kada $n \to \infty$, tada i $k \to \infty$, pa kako je $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\right) = +\infty$, sledi da je i $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, što znači da je harmonijski red (4) divergentan.

Tvrđenje 2. Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada je niz parcijalnih suma $(s_n)_{n\in N}$ ograničen.

Dokaz. Konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je ekvivalentna konvergenciji niza $(s_n)_{n\in N}$, a svaki konvergentan niz je ograničen.

Opet, primenom principa kontrapozicije dobijamo kao posledicu dovoljan uslov divergencije reda.

Ako niz parcijalnih suma $(s_n)_{n\in N}$ nije ograničen, tada je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Napomenimo i ovde da ograničenost niza $(s_n)_{n\in N}$ predstavlja samo potreban ali ne i dovoljan uslov konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kao što to ilustruje sledeći primer.

Primer 3. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{5}$$

Iz $a_n = (-1)^{n-1} \not\to 0$ $(n \to \infty)$, na osnovu posledice Tvrđenja 1, sledi da red (5) divergira. Kako je

$$s_n = \begin{cases} 1, & n = 2m-1, \\ 0, & n = 2m \end{cases} \qquad (m \in N),$$

sledi da je niz parcijalnih suma ograničen. Dakle, ovo je primer divergentnog reda kod koga je niz $(s_n)_{n\in N}$ ograničen. Pošto je $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m} = 0$, a $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m-1} = 1$, sledi da ne postoji $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$; dakle, red (5) oscilatorno divergira.

Primer 4. Ispitati konvergenciju *geometrijskog reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots, \quad q \neq 0. \tag{6}$$

Posmatrajmo n-tu parcijalnu sumu reda (6)

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Ako je $|q| < 1$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$, pa je red (6) konvergentan.

Ako je $q > 1$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, pa red (6) određeno divergira ka $+\infty$.

Ako je $q \leq -1$, tada $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, a time i $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ne postoje, pa je red (6) oscilatorno diverentan. Specijalno, za $q = -1$ dobijamo red (5) za koji smo već videli da oscilatorno divergira.

Za $q = 1$ dobijamo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 + \ldots,$$

kod kojeg je $s_n = n$, pa je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Dakle, za $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty,$$

tj. red (6) određeno divergira ka $+\infty$.

Dakle, geometrijski red (6) konvergira *akko* je $|q| < 1$ i njegova suma je $\dfrac{1}{1-q}$, a divergira za $|q| \geq 1$.

Tvrđenje 3 (*Košijev opšti kriterijum konvergencije reda*). Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira *akko* za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$, tako da za svako $n > n_0$ i svako $p \in N$ važi

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon,$$

odnosno, simbolički zapisano:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira } \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n)(n > n_0) \Rightarrow$$
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon \ (p = 1, 2, \ldots).$$

Konačna suma $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}$ poznata je kao *Košijev odsečak reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dokaz. Dokaz direktno sledi iz Košijevog opšteg kriterijuma konvergencije nizova primenjenog na niz parcijalnih suma $(s_n)_{n\in N}$.

1.3. Osobine konvergentnih redova

Definicija 4. Red oblika

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k} = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \quad (m \in N) \tag{7}$$

naziva se *m-ti ostatak* reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, a dobija se kad u redu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ odbacimo prvih m članova.

Tvrđenje 4. 1. Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira *akko* konvergira neki njegov m-ti ostatak r_m.

2. Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada je $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$.

Dokaz. 1. Fiksirajmo m i označimo sa s_m i s_{m+n} redom m-tu i $m+n$-tu parcijalnu sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, tj. $s_m = a_1 + \cdots + a_m$, $s_{m+n} = a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+n}$. Sa $s_n^{(m)}$ označimo n-tu parcijalnu sumu m-tog ostatka (7), tj.

$$s_n^{(m)} = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+n}.$$

Očigledno je

$$s_n^{(m)} = s_{m+n} - s_m. \tag{8}$$

Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i ima sumu jednaku s, tj. postoji $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, tada, na osnovu svojstva limesa niza, postoji i $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+m}$ i važi

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+m} = \lim_{n\to\infty} s_n = s. \tag{9}$$

Iz (8) tada sledi da postoji i $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^{(m)}$, jer za fiksirano m je $\lim\limits_{n\to\infty} s_m = s_m$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(m)} = \lim_{n\to\infty} (s_{m+n} - s_m) = \lim_{n\to\infty} s_{m+n} - \lim_{n\to\infty} s_m = s - s_m = \overline{s},$$

što znači da konvergira i m-ti ostatak r_m reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Pretpostavimo sada obrnuto, da konvergira m-ti ostatak (7) reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, tj. da je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^{(m)} = \overline{s}$. Iz relacije (8) sada sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} s_{m+n} = \lim_{n\to\infty} (s_n^{(m)} + s_m) = \lim_{n\to\infty} s_n^{(m)} + s_m = \overline{s} + s_m,$$

odakle, zbog jednakosti (9), sledi

$$s = \overline{s} + s_m,$$

što znači da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Drugim rečima, oduzimanje ili dodavanje konačnog broja članova datom redu ne utiče na njegovu konvergenciju, a sume reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i njegovog m-tog ostatka (7) razlikuju se za sumu izostavljenih članova reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (sumu s_m prvih m članova).

2. Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i ima sumu jednaku s, tada važi jednakost

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = s_m + r_m.$$

Odavde, prelaskom na graničnu vrednost kada $m \to \infty$, sledi

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty} (s - s_m) = s - \lim_{m\to\infty} s_m = s - s = 0.$$

Tvrđenje 5 (*Aditivnost sume reda*). Ako redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiraju i njihove sume su s_1 i s_2 redom, tada konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ i ima sumu $s_1 \pm s_2$, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = s_1 \pm s_2. \tag{10}$$

Dokaz. Neka su s_n i t_n n-te parcijalne sume redova $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, tj. $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ i $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Tada je $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} t_n = s_1 \pm s_2$ (gde smo koristili svojstvo aditivnosti konačne sume i limesa).Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)$ se naziva *suma* (*razlika*) redova $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Napomena. Primetimo da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ u opštem slučaju ne sledi konvergencija redova $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, kao što to pokazuje sledeći primer. Red $(1-1)+(1-1)+\cdots$ konvergira, a redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$ divergiraju.

Tvrđenje 6 (*Homogenost sume reda*). Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i ima sumu jednaku s, tada konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$, $c \in R$ i njegova suma je cs, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cs.$$

Dokaz. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} ca_k = c \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = c \lim\limits_{n\to\infty} s_n = cs$. (koristili smo svojstvo homogenosti konačne sume i limesa).

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ naziva se proizvod reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i broja c.

Operacije sabiranja redova i množenja reda brojem nazivaju se *linearnim operacijama* sa redovima. Iz prethodnog izlaganja sledi da se linearne operacije sa redovima izvode tako što se izvrše linearne operacije sa članovima tih redova.

Ako su redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentni, o ponašanju njihovog zbira ne možemo ništa unapred određeno reći. U jednom slučaju red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentan $\Big($kao što smo to pokazali u primeru sa redovima $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)\Big)$, dok u drugom slučaju imamo divergentan red, kao što to pokazuje sledeći primer.

Primer 5. Ispitati konvergenciju zbira (sume) redova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{n}\right).$$

Harmonijski red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergira jer je, kao što smo pokazali u Primeru 2 odeljka 1.2,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty, \quad \text{gde je} \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (n \in N).$$

Odatle sledi da i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3^{n-1}} + \dfrac{1}{n}\right)$ divergira. Naime, njegova n-ta parcijalna suma

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1 - \dfrac{1}{3^n}}{1 - \dfrac{1}{3}} + s_n \\ &= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + s_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} + s_n \to \infty \text{ kad } n \to \infty, \end{aligned}$$

jer $s_n \to \infty$ kad $n \to \infty$.

Zbir ova dva divergentna reda je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

koji je takođe divergentan, jer njegova n-ta parcijalna suma

$$\begin{aligned} S_n &= 2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right) \\ &= 2s_n+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} \to +\infty \text{ kad } n\to\infty. \end{aligned}$$

Međutim, u slučaju zbira konvergentnog i divergentnog reda ove neodređenosti nema. O tome govori sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 7. Ako je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan, a red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan, onda su zbir i razlika tih redova, tj. redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ divergentni.

Dokaz. Ako pretpostavimo suprotno tvrđenju da su redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ konvergentni, onda bi i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n \mp b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bio konvergentan, na osnovu Tvrđenja 5, a to je suprotno pretpostavci da je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Tvrđenje 8. Konvergentan red ima *svojstvo asocijativnosti*, tj. ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, onda konvergira i red $(a_1+a_2+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots+a_{n_2})+(a_{n_2+1}+a_{n_2+2}+\cdots+a_{n_3})+\cdots$, gde je n_1, n_2, n_3,... rastući niz prirodnih brojeva i važi:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_{i-1}+1}^{n_i} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

gde je $n_0 = 0$.

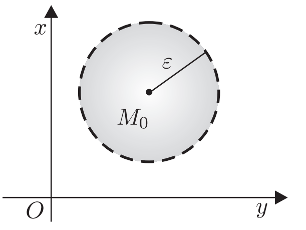
Dokaz. Niz parcijalnih suma reda

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_{i-1}+1}^{n_i} a_n = \sum_{i=1}^{\infty}\left(a_{n_{i-1}+1}+\cdots+a_{n_i}\right), \qquad n_0 = 1,$$

$(s_{k_n})_{n\in N}$ je podniz niza (s_n) parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Sledi, $\lim\limits_{n\to\infty} s_{k_n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Napomenimo da, međutim, grupisanjem članova divergentnog reda ne moramo dobiti divergentan red. Na primer, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1\ldots$ je divergentan, a red $(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots$ konvergentan.

U ravni Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema Oxy ε-okolina tačke M_0 predstavlja skup svih tačaka M koje se nalaze u unutrašnjosti kruga poluprečnika ε sa centrom u tački M_0 (sl. 1).



sl. 1

Definicija 2. Skup $X \subset R^2$ je *otvoren* ako za svaku tačku $M \in X$ postoji ε-okolina koja je podskup od X.

Definicija 3. Skup $X \subset R^2$ je *zatvoren* ako je skup $R \setminus X$ otvoren.

Definicija 4. Pod *granicom* ili *rubom* skupa $X \subset R^2$ podrazumevamo skup $\Gamma_X \subset R^2$, takav da svaka ε-okolina proizvoljne tačke $M \in \Gamma_X$ sadrži i tačke iz X i iz $R \setminus X$.

Definicija 5. Pod *okolinom* tačke M podrazumevamo svaki otvoren skup koji sadrži tačku M.

Definicija 6. Skup tačaka $M \in R^2$, takvih da je $d(M_0, M) \leq R$ $(R > 0)$ je *zatvorena dvodimenzionalna kugla* (*lopta*) poluprečnika R sa centrom u tački M_0.

Ako je $d(M_0, M) < R$, tada je skup tačaka M *otvorena dvodimenzionalna kugla* (lopta).

Primetimo da je ε-okolina tačke M_0, u stvari, jedna otvorena dvodimenzionalna kugla (lopta) poluprečnika ε sa centrom u tački M_0.

Definicija 7. Skup $X \subset R^2$ je *ograničen* ako sve njegove tačke pripadaju nekoj dvodimenzionalnoj kugli.

Definicija 8. Za skup $X \subset R^2$ kažemo da je *povezan* ako za bilo koje dve tačke $M, N \in X$ postoji neprekidna linija koja prolazi kroz M i N i pripada skupu X.

Definicija 9. Otvoren i povezan skup naziva se *oblast*.

Zatvoren i povezan skup naziva se *zatvorena oblast*.

Definicija 10. Tačka M je *tačka nagomilavanja* skupa X ako se u svakoj njenoj ε-okolini nalazi bar jedna tačka iz X različita od M.

Definicija 11. Neka je $D \subset R^2$ neprazan skup. Ako se svakoj tački $M(x, y) \in D$ pridruži, prema zakonu (pravilu) f, tačno jedan realan broj z, tada je f *realna funkcija dve realne promenljive*.

Pišemo

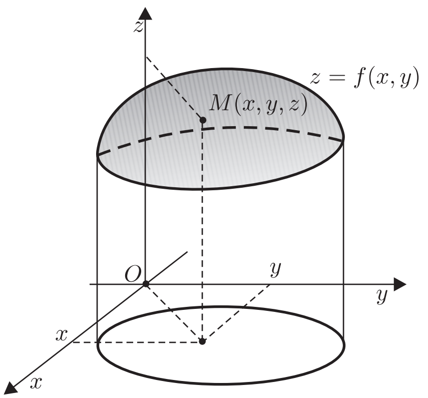
$$z = f(x, y) \quad \text{ili} \quad z = f(M).$$

Promenljive x i y su *nezavisno promenljive* ili *argumenti*, z je *zavisno promenljiva* ili *funkcija*. Skup D je *domen*, a skup

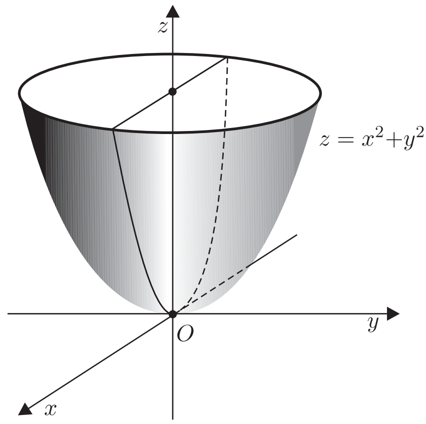
$$V = \{z \in R | z = f(x, y) \wedge (x, y) \in D\}$$

skup vrednosti funkcije f.

Grafik funkcije $z = f(x, y)$ je geometrijsko mesto tačaka $M(x, y, z)$ u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$, takvih da je $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ (sl. 2).



sl. 2



sl. 3

Grafik funkcije $z = f(x, y)$ može predstavljati površ u koordinatnom sistemu $Oxyz$. Tada kažemo da je $z = f(x, y)$ jednačina te površi.

Primer 1. Funkcija $z = x + 2y$ definisana je za svako $(x, y) \in R^2$.

Primer 2. Funkcija $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ definisana je, tj. z je realan broj, ako je $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, tj. $x^2 + y^2 \leq 4$, pa je domen funkcije skup $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Primer 3. Grafik funkcije $z = x^2 + y^2$ je, kao što znamo iz analitičke geometrije, kružni paraboloid (sl. 3).

1.2. Granična vrednost i neprekidnost funkcije dve promenljive

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na skupu D i neka je $M_0(x_0, y_0)$ tačka nagomilavanja skupa D.

Definicija 12. Broj c je *granična vrednost* funkcije $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$ (koji zavisi od ε), tako da za svaku tačku $M(x, y)$ za koju važi $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, tj. $0 < d(M, M_0) < \delta$, važi nejednakost $|f(x, y) - c| < \varepsilon$, tj. $|f(M) - c| < \varepsilon$.

Piše se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = c \quad \text{ili} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = c \quad \text{ili} \quad \lim_{M\to M_0} f(M) = c.$$

Sadržaj Definicije 12 može se zapisati na sledeći način:

$$c = \lim_{M\to M_0} f(x,y) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall M)(0 < d(M,M_0) < \delta \Rightarrow f(M) - c| < \varepsilon).$$

Lako je videti da važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 1. Potreban i dovoljan uslov da funkcija $z = f(x,y)$ ima graničnu vrednost c u tački $M_0(x_0,y_0)$ je da se ona može predstaviti u obliku

$$f(x,y) = c + \alpha(x,y),$$

gde je $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha(x,y) = 0$.

Treba razlikovati graničnu vrednost $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ od *ponovljenih* (*uzastopnih*) graničnih vrednosti:

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) \quad \text{i} \quad \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)).$$

Primer 4. Ponovljene granične vrednosti funkcije $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ u tački $(0,0)$ su:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1$$

i

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1.$$

Međutim, granična vrednost $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji. Zaista, ako tačka (x,y) teži tački $(0,0)$ preko dva niza: $(x_n,y_n) = \left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$ i $(x'_n,y'_n) = \left(\dfrac{2}{n},\dfrac{1}{n}\right)$ $(n\to+\infty)$, odgovarajući nizovi vrednosti funkcije teže različitim granicama: $z_n = f(x_n,y_n) = 0 \to 0$, $z'_n = f(x'_n,y'_n) = \dfrac{1}{3} \to \dfrac{1}{3}$ $(n\to+\infty)$.

Primer 5. Ponovljene granične vrednosti funkcije $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ u tački $(0,0)$ su:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{0+y^2} = 0$$

i

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2+0}=0,$$

dakle, jednake su.

Međutim, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji. Zaista, ako $(x,y)\to(0,0)$ po pravoj $y=kx$ $(k\in R)$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

što za razne vrednosti k ima različite vrednosti.

Primer 6. Data je funkcija $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$. Pokažimo da postoje granične vrednosti $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ i $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, a da ne postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$. Zaista,

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(0\cdot\sin\frac{1}{y}\right)=0.$$

Kako je

$$0\le\left|x\sin\frac{1}{y}\right|\le|x|\cdot 1=|x|,$$

sledi da je

$$\lim_{x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y}=0.$$

Međutim, granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}\right)$ ne postoji, jer ne postoji $\lim\limits_{y\to 0}\sin\dfrac{1}{y}$.

Iz datih primera vidi se da iz postojanja granične vrednosti funkcije u datoj tački ne sledi postojanje i ponovljenih graničnih vrednosti u toj tački i obrnuto - iz postojanja ponovljenih graničnih vrednosti funkcije ne sledi postojanje i granične vrednosti funkcije u odgovarajućoj tački. Ovo ne znači da se ne može uspostaviti određena veza između ove dve vrste graničnih vrednosti funkcije dve promenljive.

Tvrđenje 2. Ako postoji granična vrednost funkcije $z=f(x,y)$ u tački $M_0(x_0,y_0)$ i ako postoji $\delta>0$, takvo da za svako $y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$, $y\ne y_0$ postoji granična vrednost

$$g(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

tada postoji i ponovljena granična vrednost $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$ i pri tome je

$$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = c$ i neka je $\varepsilon > 0$ realan broj, takav da za svaku tačku $M(x,y)$, za koju je $0 < d(M, M_0) < \delta$, važi $|f(x,y) - c| < \varepsilon$. Kako je $d(M, M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \geq |y-y_0|$, to iz $0 < |y-y_0| < \delta$ sledi $|f(x,y) - c| < \varepsilon$. Ako u poslednjoj nejednakosti pređemo na graničnu vrednost kad $x \to x_0$, dobijamo da iz $0 < |y - y_0| < \delta$ sledi $|g(y) - c| < \varepsilon$, tj. da je

$$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y),$$

što je i trebalo dokazati.

Primer 7. Data je funkcija

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Pokazati da je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 0.$$

Očigledno

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^2} = \lim_{y\to 0} y = 0$$

i

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Da bismo našli $\lim\limits_{x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, uvedimo polarne koordinate

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi.$$

Biće

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \lim_{\rho\to 0}\rho(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 0.$$

Definicija 13. Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definisana na skupu D. Za funkciju $z = f(x,y)$ kažemo da je *neprekidna* u tački $M_0(x_0,y_0) \in D$ ako je

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0). \tag{2}$$

Drugim rečima, funkcija $z = f(x,y)$ je neprekidna u tački $M_0(x_0,y_0)$ ako je definisana u toj tački, tj. postoji $f(x_0,y_0)$, ako postoji granična vrednost funkcija u toj tački i ako su te dve vrednosti jednake.

Imajući ovo u vidu, možemo dati i drugu definiciju neprekidnosti funkcije.

Definicija 14. Funkcija $z = f(x, y)$ je neprekidna u tački $M_0(x_0, y_0)$ ako za svaki pozitivan broj ε postoji pozitivan broj δ, koji zavisi od ε, tako da je za sve tačke $M(x, y)$ za koje važi $d(M, M_0) < \delta$, tj. $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$, zadovoljena nejednakost $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

Sadržaj Definicije 13 može se zapisati na sledeći način:
Funkcija $z = f(x, y)$ je neprekidna u tački $M_0(x_0, y_0) \in D$

$$\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall M)(d(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon).$$

Primetimo da je ovo, u stvari, definicija granične vrednosti funkcije $z = f(x, y)$ u slučaju kad je ta granična vrednost jednaka vrednosti funkcije u graničnoj tački, a što je u skladu sa (2).

Definicija 15. Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na skupu D, neka tačka $M_0(x_0, y_0) \in D$, neka su $\triangle x$ i $\triangle y$ priraštaji nezavisno promenljivih x i y tako da i tačka $M(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) \in D$. Razlika

$$\triangle z = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) \tag{3}$$

naziva se *totalni* (*potpuni*) *priraštaj* funkcije $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$. Razlike

$$\triangle_x z = f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

i

$$\triangle_y z = f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$$

nazivaju se *parcijalni priraštaji* funkcije $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$.

Primer 8. Naći totalni i parcijalne priraštaje funkcije $z = xy$ u tački $M_0(3, 2)$ ako je $\triangle x = 0,2$ i $\triangle y = 0,25$.

Totalni priraštaj je

$$\triangle z = (3 + 0,2)(2 + 0,25) - 3 \cdot 2 = 7,2 - 6 = 1,2.$$

Parcijalni priraštaji su:

$$\triangle_x z = (3 + 0,2) \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 0,4$$

i

$$\triangle_y z = 3(2 + 0,25) - 3 \cdot 2 = 0,75.$$

Ispitajmo sada funkciju na rubu oblasti.

Na duži OA je $y = 0$ i $0 \leq x \leq 3$, pa imamo funkciju jedne promenljive

$$z = g(x) = 2x^2 - 4x + 6.$$

Kako je $g'(x) = 4x - 4$ i $g'(x) = 0$ za $x = 1$, nalazimo $z_2 = g(1) = f(1,0) = 4$. Nalazimo još i $z_3 = g(0) = f(0,0) = 6$ i $z_4 = g(3) = f(3,0) = 12$.

Na duži OB je $x = 0$, $0 \leq y \leq 3$, pa imamo funkciju jedne promenljive

$$z = h(y) = 3y^2 - 6y + 6.$$

Kako je $h'(y) = 6y - 6$ i $h'(y) = 0$ za $y = 1$, nalazimo $z_5 = h(1) = f(0,1) = 3$. Nalazimo još $z_6 = h(3) = f(0,3) = 15$.

Na duži AB je $y = 3 - x$, $0 \leq x \leq 3$, pa imamo funkciju jedne promenljive

$$z = p(x) = 5x^2 - 16x + 15.$$

Kako je $p'(x) = 10x - 16$ i $p'(x) = 0$ za $x = \dfrac{8}{5}$, nalazimo $z_7 = p\left(\dfrac{8}{5}\right) = f\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{7}{5}\right) = \dfrac{11}{5}$.

Upoređujući dobijene vrednosti z_1–z_7 zaključujemo da je najveća vrednost funkcije $z_6 = 15$ koju postiže u tački $A(3,0)$, a najmanja $z_7 = \dfrac{11}{5}$ koju postiže u tački $Q\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$.

2. REALNA FUNKCIJA TRI REALNE PROMENLJIVE

U ovom odeljku ćemo, prateći izlaganje o funkcijama dve realne promenljive, dati pregled osnovnih pojmova i svojstava funkcija tri realne promenljive.

Skup svih uređenih trojki realnih brojeva $R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in R\}$ u kome je sabiranje i množenje skalarom definisano na sledeći način:

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$
$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)(\lambda \in R)$$

je vektorski prostor nad R.

Ako za proizvoljne $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$ iz R^3 stavimo

$$xy = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \tag{61}$$

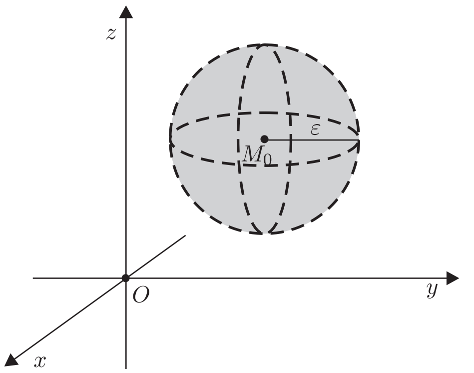
tada je sa (61) definisan skalarni proizvod u R^3, što znači da je vektorski prostor R^3 sa definisanim skalarnim proizvodom (61) jedan euklidski vektorski prostor.

Elemente od R^3 predstavljaćemo tačkama euklidskog prostora E_3 u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem $Oxyz$. Ako je M tačka iz E_3 kojim smo predstavili element $(x, y, z) \in R^3$, tada ćemo element (x, y, z) označavati sa $M(x, y, z)$ ili prosto sa M.

Iz (61) sledi pojam rastojanja u R^3. Rastojanje između tačaka $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ i R^3 je

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Pojmovi: ε-okoline, otvorenog i zatvorenog skupa, granice skupa, okoline, zatvorene i otvorene kugle (lopte), ograničenog skupa, povezanog skupa, otvorene i zatvorene oblasti, tačke nagomilavanja definišu se na isti način kao u R^3, s napomenom da se ovde radi o trodimenzionalnoj zatvorenoj kugli (lopti) i o trodimenzionalnoj otvorenoj kugli (lopti), tj. ε-okolini (sl. 11).



sl. 11

Definicija 26. Ako je $V \subset R^3$ neprazan skup i ako se svakoj tački $M(x, y, z) \in V$ pridružuje prema zakonu (pravilu) f tačno jedan broj $u \in R$, tada je f *realna funkcija tri realne promenljive.*

Piše se

$$u = f(x, y, z) \quad \text{ili} \quad u = f(M).$$

Promenljive x, y i z su *nezavisno promenljive* ili *argumenti*, u je *zavisno promenljiva* ili *funkcija.* Skup V je *domen*, a skup

$$W = \{u \in R | u = f(x, y, z) \wedge (x, y, z) \in D\}$$

skup vrednosti funkcije f.

Primer 27. Funkcija $u = x^2 + y^2 + z^2$ je definisana za svako $(x, y, z) \in R^3$.

Primer 28. Funkcija $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ je definisana za (x, y, z) za koje je $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, tj. na zatvorenoj lopti (kugli) poluprečnika 1, sa centrom u tački $O(0, 0, 0)$.

Granična vrednost i neprekidnost funkcije tri promenljive definiše se na isti način kao kod funkcije dve promenljive.

Neka je funkcija $u = f(x, y, z)$ definisana na skupu V, neka tačka $M_0(x_0, y_0, z_0) \in V$, neka su $\triangle x, \triangle y$ i $\triangle z$ redom priraštaji nezavisno promenljivih x, y i z, tako da i tačka $M(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y, z_0 + \triangle z) \in V$.

Razlika

$$\triangle u = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y, z_0 + \triangle z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

je *totalni (potpuni) priraštaj* funkcije $u = f(x, y, z)$, a razlike

$$\begin{aligned}
\triangle_x u &= f(x_0 + \triangle x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),\\
\triangle_y u &= f(x_0, y_0 + \triangle y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),\\
\triangle_z u &= f(x_0, y_0, z_0 + \triangle z) - f(x_0, y_0, z_0)
\end{aligned}$$

parcijalni (delimični) priraštaji te funkcije u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Parcijalni izvodi prvog reda funkcije $u = f(x, y, z)$ definišu se na isti način kao kod funkcije dve promenljive:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle_x u}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\triangle x},\\
\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} &= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle_y u}{\triangle y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\triangle y},\\
\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0} &= \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle_z u}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \triangle z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\triangle z}
\end{aligned}$$

Pored navedenih, koriste se i druge oznake za parcijalne izvode prvog reda. Tako je:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} &= \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0, z_0) = u'_x(x_0, y_0, z_0),\\
\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} &= \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0, z_0) = u'_y(x_0, y_0, z_0),\\
\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0} &= \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = f'_z(x_0, y_0, z_0) = u'_z(x_0, y_0, z_0).
\end{aligned}$$

Primer 29. Ako je

$$u = xz^2 + x^2y + y^2z,$$

pokazati da je

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} = (x + y + z)^2.$$

Parcijalni izvodi prvog reda date funkcije su:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 + 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2xz + y^2,$$

LITERATURA

[1] D. Adnađević, Z. Kadelburg, *Matematička analiza I i II*, "Nauka", Beograd, 1995.

[2] R. Dacić, *Viša matematika*, "Naučna knjiga", Beograd, 1972.

[3] А. В. Ефимов, *Математический анализ* (специальные разделы), Часть I, ,,Высшая школа", Москва, 1980.

[4] Г. М. Фихтенгольц, *Курс диференциального и интегрального исчисления*, I и II том, "Наука", Москва, 1966.

[5] А. А. Гусак, *Высшая математика*, Том, 2, БГУ, Минск, 1978.

[6] В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, *Основы математического анализа*, Часть I, "Наука", Москва, 1982.

[7] Л. Д. Кудрявцев, *Курс математического анализа*, Высшая школа", Москва, 1981.

[8] Z. Mamuzić, B. Đerasimović, *Osnovi matematičke analize*, "Narodna knjiga", Beograd, 1981.

[9] V. Mićić, M. Trifunović, *Matematika I*, "Naučna knjiga", Beograd, 1988.

[10] D. Mihailović, R. Janić, *Elementi matematičke analize I*, "Naučna knjiga", Beograd, 1982.

[11] С. М. Никольский, *Курс математического анализа*, "Наука", Москва, 1975.

[12] Н. С. Пискунов, *Диференциальное и интегральное исчисление*, "Наука", Москва, 1976.

[13] D. B. Scott, S. R. Tims, *Matematical Analysis-An Introduction*, Cambrdge University Press, 1966.

[14] E. Stipanić, *Viša matematika. prvi deo*, "Građevinska knjiga", Beograd, 1973.

[15] Z. Šami, *Matematika I*, Saobraćajni fakultet u Beogradu, Beograd, 1988.

[16] В. С. Шипачев, *Основы высшей математики*, Высшая школа, Москва, 1989.

[17] В. А. Зорич, *Математический анализ*, "Наука", Москва, 1981.